CAPES de Mathématiques
Préparation à l'écrit
Algèbre et probabilités

Université Joseph Fourier
Année 2007-2008

Fiche 11 : Algèbre (5) Polynômes

« Ma cohabitation passionnée avec les mathématiques m'a laissé un amour fou pour les bonnes définitions, sans lesquelles il n'y a que des à-peu-près. » Gustave Flaubert, Vie de Henry Brulard

1 Rappels de cours

On se donne un sous-corps K du corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes et on note $K[X]$ la K-algèbre des polynômes en une indéterminée X sur K.
L'indéterminée X est un élément de $K[X]$, qui engendre $K[X]$ en tant que K-algèbre, ainsi tout élément P de $K[X]$ s'écrit comme une somme finie

$$P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n = \sum_{i=0}^{n} a_iX^i, \qquad a_i \in K.$$

De plus, X engendre $K[X]$ librement, c'est-à-dire que $(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base du K-espace vectoriel $K[X]$.
De façon équivalente, l'écriture de P comme une série $P = \sum_{i\geqslant 0} a_iX^i$ avec $a_i = 0$ pour i suffisamment grand est unique, c'est-à-dire que si $Q = \sum_{i\geqslant 0} b_iX^i$ avec $b_i = 0$ pour i suffisamment grand, alors $P = Q$ si et seulement si $a_i = b_i$ pour tout $i \geqslant 0$. Un morphisme naturel de K dans $K[X]$ est $a \mapsto aX^0$.
Les lois de l'algèbre $K[X]$ sont les suivantes : pour tout élément a de K et tous$P$ et Q éléments de $K[X]$ définis ci-dessus, on pose

$$aP = \sum_{i\geqslant 0}(aa_i)X^i, \quad P + Q = \sum_{i\geqslant 0}(a_i + b_i)X^i,$$

et

$$PQ = \sum_{i\geqslant 0} c_iX^i, \quad \text{avec } c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k\, b_{i-k}.$$

L'algèbre $K[X]$ est une K-algèbre libre sur l'élément X : cela signifie que pour toute K-algèbre A et tout élément α de A, il existe un unique morphisme de K-algèbre $E_\alpha : K[X] \to A$, dit morphisme d'évaluation, tel que $E_\alpha(X) = \alpha$. Le morphisme E_α est donné par

$$P = \sum_{i\geqslant 0} a_iX^i \ \mapsto \ E_\alpha(P) = \sum_{i\geqslant 0} a_i\alpha^i.$$

On note aussi $E_\alpha(P) = P(\alpha)$. Dans le cas particulier où $A = K[X]$ et $\alpha = X$, l'unicité de E_α montre que E_X est l'application identité sur $K[X]$. C'est pourquoi on note souvent $P(X)$ le polynôme P.

Si $A = K$, la fonction polynomiale associée à P est l'application $F_P : K \to K$ telle que, pour tout x dans K, $F_P(x) = E_x(P)$. On note $F_P = P$.

Le degré du polynôme P vaut $\deg(P) = -\infty$ si $P = 0$, et, si $P \neq 0$,

$$\deg(P) = \max\{i \in \mathbb{N}\,;\, a_i \neq 0\}.$$

Pour tous P et Q dans $K[X]$,

$$\deg(P+Q) \leqslant \max\{\deg(P), \deg(Q)\}, \qquad \deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q),$$

avec la convention $(-\infty) + d = -\infty$ pour tout d. Le coefficient dominant de P vaut 0 si $P = 0$ et a_d si $\deg(P) = d \geqslant 0$. Le terme dominant de P vaut 0 si $P = 0$ et $a_d x^d$ si $\deg(P) = d \geqslant 0$. Un polynôme est unitaire si son coefficient dominant vaut 1.

L'anneau $K[X]$ est euclidien : cela signifie que pour tous polynômes U et V avec $V \neq 0$, il existe un unique couple de polynômes (Q, R) tel que

$$U = VQ + R, \qquad \deg(R) \leqslant \deg(V) - 1.$$

2 Vrai ou faux

1. L'anneau $K[X]$ des polynômes à coefficients dans un corps K est intègre.

2. Les inversibles de $K[X]$ sont les polynômes de degré 0.

3. Soit $d \geqslant 0$ un entier. L'ensemble des polynômes à coefficients dans K de degré inférieur ou égal à d est :

a) un sous-groupe du groupe additif $K[X]$.

b) un sous-K-espace vectoriel de $K[X]$ de dimension d sur K.

c) un idéal de $K[X]$.

4. Soit K et L deux sous-corps de $\mathbb{C}$ avec $K \subset L$. Alors $K[X] \subset L[X]$ et :

a) un polynôme de degré 1 est irréductible dans $K[X]$.

b) un polynôme irréductible dans $K[X]$ est de degré 1.

c) si un polynôme de $K[X]$ est irréductible dans $L[X]$, il est irréductible dans $K[X]$.

d) si un polynôme de $K[X]$ est irréductible dans $K[X]$, il est irréductible dans $L[X]$.

5. L'ensemble $U \subset K[X]$ des polynômes unitaires à coefficients dans un corps K est : a) stable par multiplication ; b) un idéal de $K[X]$.

6. a) Tout polynôme est multiple d'un unique polynôme unitaire.

b) Tout polynôme irréductible est multiple d'un unique polynôme unitaire.

3 Exercices de cours

1. Soit a un nombre. Effectuer les divisions euclidiennes de $X^4 - 5X^2 + 6$ par $X - a$ et par $(X - a)^2$.

2. Effectuer la division euclidienne de $X^6 - X^4 - X^2 + 1$ par $X^3 - 1$.

3. Déterminer un pgcd des polynômes $P(X) = X^4 + 2X^2 - X + 5$ et $Q(X) = X^4 + 3X^2 + X + 1$.

4. Soit P un polynôme de degré 3 sur un corps K tel que pour tout x dans K, $P(x) \neq 0$. Prouver que P est irréductible dans $K[X]$.

5. Soit $K \subset L \subset \mathbb{C}$ deux sous-corps de $\mathbb{C}$. Soit P et Q des éléments de $K[X]$ et D un élément de $L[X]$ tels que $P \neq 0$ et $P = QD$. Prouver que D appartient à $K[X]$, au sens où tous les coefficients de D appartiennent à K.

6. Soit P un élément de $\mathbb{R}[X]$ et $\alpha = a + \mathrm{i}b$ un nombre complexe tel que $b \neq 0$ et $P(\alpha) = 0$. Prouver que $Q(X) = X^2 - 2aX + a^2 + b^2$ divise P dans $\mathbb{R}[X]$.

4 Exercices

1. À l'aide de la formule du binôme et de la formule donnant le produit de deux polynômes, calculer, pour tous entiers positifs m et n, les deux membres de l'égalité

$$(X + 1)^m (X + 1)^n = (X + 1)^{m+n}.$$

En choisissant $m = n$, en déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Donner une démonstration alternative de la formule obtenue en dénombrant les parties à n éléments d'un ensemble X réunion disjointe de deux ensembles A et B de cardinal n.

2. a) Soit P et Q des éléments de $K[X]$ tels que $P^2 - XQ^2 = 0$. En considérant les degrés de P^2 et XQ^2, prouver que $P = Q = 0$.

b) On suppose que dans K l'équation $a^2 + b^2 = 0$ n'admet que la solution triviale $a = b = 0$. Prouver que si les éléments P, Q et R de $K[X]$ sont tels que $P^2 - XQ^2 + R^2 = 0$, alors $P = Q = R = 0$.

c) Donner des exemples de sous-corps K de $\mathbb{C}$ satisfaisant l'hypothèse de b).

3. a) Prouver que $X^3 = 1$ dans l'anneau $K[X]/(X^2 + X + 1)$.

En déduire les valeurs de l'entier naturel m pour lesquelles le polynôme $X^2 + X + 1$ divise le polynôme $(X + 1)^m - X^m - 1$.

b) Prouver que pour tout entier naturel m, le polynôme $X^2 - X + 1$ divise $(X - 1)^{m+2} + X^{2m+1}$.

4. Si a et b sont des éléments d'un anneau commutatif et $i \geqslant 1$ un entier, on rappelle l'identité remarquable

$$a^i - b^i = (a-b)\sum_{j=0}^{i-1} a^j b^{i-j-1}.$$

a) Soit a un élément de K et P un élément de $K[X]$ tels que $P(a) = 0$. Montrer que $X - a$ divise P.

a') Donner une autre preuve de a) en utilisant la division euclidienne.

b) Soit P un élément de $K[X]$. Montrer que $P - X$ divise $P \circ P - X$, c'est-à-dire qu'il existe Q dans $K[X]$ tel que $P(P(X)) - X = Q(X)(P(X) - X)$.

c) Soit $k \geqslant 1$ et $P = \sum_{i=1}^{k} X^{n_i}$ où les entiers $n_i \geqslant 0$ vérifient les congruences $n_i \equiv i - 1$ modulo k.

Prouver que $(X-1)P$ est divisible par $X^k - 1$. En déduire que P est divisible par $Q = \sum_{i=1}^{k} X^{i-1}$.

5. Soit Δ la transformation de $K[X]$ définie par

$$\Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X).$$

On pose $\Delta^0 = \mathrm{Id}_{K[X]}$ puis, pour tout $n \geqslant 0$, $\Delta^{n+1} = \Delta \circ \Delta^n$.

Résoudre la question a) ou la question a'), puis la question b).

a) a1) Prouver que si $\deg(P) = d$, alors $\Delta^{d+1}(P) = 0$ et $\Delta^d(P) \neq 0$.

a2) On pose $C_0(X) = \binom{X}{0} = 1$ puis, pour tout nombre entier $d \geqslant 1$,

$$C_d(X) = \binom{X}{d} = \frac{1}{d!} X(X-1)\cdots(X-d+1).$$

Calculer $\Delta(C_d(X))$ pour tout $d \geqslant 0$. En déduire que, si $\deg(P) = d \geqslant 0$,

$$P(X) = \sum_{i=0}^{d} \Delta^i(P)(0)\, C_i(X).$$

a3) Déduire de a2) que si P est un polynôme de degré $d \geqslant 0$ à valeurs entières sur les entiers naturels, c'est-à-dire si $P(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$ (on rappelle que $\mathbb{N} \subset K$ puisque K est un sous-corps de $\mathbb{C}$), alors le polynôme P s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ des polynômes binomiaux $C_i(X)$ pour $1 \leqslant i \leqslant d$.

a') Montrer que l'application $\Delta : K_d[X] \to K_{d-1}[X]$ est linéaire et calculer son image et son noyau.

b) Prouver que pour tout polynôme Q de degré au plus $d-1$, il existe un unique polynôme P de degré au plus d tel que $\Delta(P) = Q$ et $P(0) = 0$.

En déduire une expression pour les sommes $Q(0) + Q(1) + \cdots + Q(n)$ pour tout entier $n \geqslant 0$, puis la valeur des sommes $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ et $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$.

6. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(t) \geqslant 0$ pour tout nombre réel t. Prouver qu'il existe deux polynômes A et B de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

Indication : on pourra déduire de la décomposition de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{C}[X]$ tel que $P = Q\overline{Q}$, où on note

$$Q = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i, \quad b_i \in \mathbb{C}, \quad \overline{Q} = \sum_{i=0}^{m} \overline{b}_i X^i.$$

7. Soient K un corps et $a_0, \ldots, a_n$ des éléments de K deux à deux distincts.
a) Prouver que si $b_0, \ldots, b_n$ sont des éléments de K, il existe un unique polynôme P de $K[X]$ de degré $\deg(P) \leqslant n$ tel que pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$, $P(a_i) = b_i$.
Montrer les formules d'interpolation de Lagrange, qui affirment que P vaut

$$P = \sum_{i=0}^{n} b_i \frac{P_i(X)}{P_i(a_i)}, \quad P_i(X) = \prod_{j \neq i} (X - a_j).$$

b) Soit Q un polynôme de degré $\deg(Q) \leqslant n - 1$ En considérant le coefficient du terme de degré n du polynôme P, fourni par la question a), tel que $\deg(P) \leqslant n$ et, pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$, $P(a_i) = Q(a_i)$, montrer que

$$\frac{Q(a_0)}{P_0(a_0)} + \frac{Q(a_1)}{P_1(a_1)} + \cdots + \frac{Q(a_n)}{P_n(a_n)} = 0.$$

8. Calculer le pgcd de P et Q pour :
a) $P = X^2 + aX + b$ et $Q = X^2 + pX + q$ avec $p \neq a$;
b) $P = aX^2 + bX + c$ et $Q = 2X + a$ avec $a \neq 0$;
c) $P = X^3 + pX + q$ et $Q = 3X^2 + p$ avec $p \neq 0$.
En déduire qu'il existe des polynômes A et B dont les coefficients sont des expressions polynômiales à coefficients entiers en (a, b, p, q) dans le cas a), en (a, b, c) dans le cas b) et en (p, q) dans le cas c), tels que $AP + BQ$ soit égal à $(b - q)^2 + p(b - q)(p - a) + q(p - a)^2$ dans le cas a), $b^2 - 4ac$ dans le cas b), et $4p^3 - 27q^2$ dans le cas c).

CAPES de Mathématiques **Université Joseph Fourier**
Préparation à l'écrit **Année 2007-2008**
Algèbre et probabilités

Fiche 12 : Algèbre (6) Polynômes, racines et fractions rationnelles

« Un homme est comme une fraction dont le numérateur est ce qu'il est et le dénominateur ce qu'il pense de lui-même. Plus le dénominateur est grand, plus la fraction est petite. » Léon Tolstoï

1 Exercices de cours

On se donne un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ et sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$, comme

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i = a_n \prod_{j=1}^{n} (X - x_j).$$

1. Relations entre coefficients et racines a) Prouver que pour tout nombre complexe t,

$$\frac{P(X) - P(t)}{X - t} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=k}^{n} a_i\, t^{i-k} \right) X^{k-1}.$$

b) Soit $S_0 = n$ et, pour tout entier $m \geqslant 1$, S_m la $m$ème somme de Newton en les racines du polynôme P, définie comme $S_m = \sum_{j=1}^{n} (x_j)^m$. Montrer que

$$P'(X) = \sum_{j=1}^{n} \frac{P(X)}{X - x_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{P(X) - P(x_j)}{X - x_j}.$$

En déduire que les sommes de Newton S_m se calculent par les relations de récurrence, dites relations de Newton, suivantes : si $m \leqslant n - 1$,

$$\sum_{i=m+1}^{n} a_i S_{i-m} + (n - m) a_m = 0,$$

et si $m \geqslant n$,

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} S_{m-i} = 0.$$

2. Fonctions symétriques élémentaires Pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, on note

$$\sigma_k = \sum x_{j_1} \cdots x_{j_k},$$

où la somme porte sur tous les $k$uplets $(j_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ d'entiers tels que

$$1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqslant n.$$

Donc σ_k est la $k$ème fonction symétrique élémentaire en les racines du polynôme P.
a) Expliciter σ_1 et σ_n dans le cas général, et tous les σ_k si $n \leqslant 4$.
b) Préciser de combien de monômes en les inconnues $(x_j)_j$ on aurait besoin pour expliciter σ_k.
c) Vérifier les relations entre coefficients et racines affirmant que, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$a_n \sigma_k = (-1)^k a_{n-k}.$$

3. Dérivation des polynômes Le polynôme P' dérivé de P est

$$P' = \sum_{i=1}^{n} i a_i X^{i-1} = \sum_{j=0}^{d-1} (j+1) a_{j+1} X^j.$$

Pour tout entier $k \geqslant 0$, le $k$ème polynôme dérivée de P est le polynôme $P^{(k)}$ défini par récurrence par $P^{(0)} = P$, puis $P^{(k+1)} = (P^{(k)})'$ pour tout $k \geqslant 0$. Par exemple, $P^{(1)} = P'$.
a) Vérifier que $P^{(k)}(0) = k! a_k$ pour tout $k \geqslant 0$ et établir les formules de Leibniz selon lesquelles $(PQ)' = P'Q + PQ'$ et plus généralement, pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$(PQ)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} P^{(i)} Q^{(k-i)}.$$

b) Prouver que pour tout élément u de K, le morphisme de K-algèbre

$$E_{X-u} : K[X] \to K[X], X \mapsto X - u$$

d'évaluation en $X - u$ est un isomorphisme. Préciser l'isomorphisme inverse.
c) Déduire de b) l'existence de coefficients a_i éléments de $\mathbb{C}$ tels que

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i (X-u)^i,$$

puis la formule de Taylor pour P, selon laquelle

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(u)}{i!} (X-u)^i.$$

d) Pour tout entier $k \geqslant 0$, on dit que u est une racine d'ordre k de P si et seulement s'il existe un polynôme Q tel que $Q(u) \neq 0$ et $P = (X-u)^k Q$. Déduire de c) que u est une racine d'ordre k de P si et seulement si

$$P(u) = P'(u) = \cdots = P^{(k-1)}(u) = 0, \qquad P^{(k)}(u) \neq 0.$$

Redémontrer ce résultat, par récurrence sur $k \geqslant 0$, en utilisant la première formule de Leibniz.

2 Exercices

1. Soient p et A deux nombres réels strictement positifs. Déterminer le ploynôme $X^2 + bX + c$ dont les deux racines sont la longueur et la largeur d'un rectangle de périmètre p et d'aire A. En déduire une relation entre le périmètre et l'aire d'un rectangle.

2. a) Déterminer le polynôme $X^2 + bX + c$ dont les racines valent $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$.
b) Prouver que trois points a, b et c du plan complexe $\mathbb{C}$ sont les sommets d'un triangle équilatéral si et seulement si $(a-c)^2-(a-c)(b-c)+(b-c)^2 = 0$ si et seulement si $a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca$.
c) Déterminer tous les polynômes de degré trois dont les racines sont les sommets d'un triangle équilatéral.

3. a) Déterminer tous les polynômes de degré 4 dont les racines dans $\mathbb{C}$ sont les quatre sommets d'un carré. On pourra traiter d'abord le cas où le carré est centré en 0, puis se ramener à ce cas.
b) Plus généralement déterminer tous les polynômes de degré n dont les racines dans $\mathbb{C}$ sont les sommets d'un polygone régulier à n cotés.
c) Déduire de b) pour le cas $n = 3$ une solution alternative à 2. c).

4. En utilisant les relations de Newton, donner les polynômes de degré 3 dont les racines x, y et z dans $\mathbb{C}$ sont les solutions du système d'équations algébriques

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2, \quad x^3 + y^3 + z^3 = 2, \quad x^4 + y^4 + z^4 = 2.$$

5. Soient $n \geqslant m \geqslant 0$ deux entiers et P et Q des polynômes à coefficients complexes de degrés $\deg(P) = m$ et $\deg(Q) = n$, donc

$$P(X) = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i = a_m \prod_{j=1}^{m}(X - x_j), \qquad Q(X) = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i = b_n \prod_{k=1}^{n}(X - y_k).$$

On suppose que pour tout entier $\ell \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{m}(x_j)^\ell = \sum_{k=1}^{n}(y_k)^\ell$.
Prouver que $Q(X) = (b_n/a_m)X^{n-m}P(X)$.

6. Prouver que si $n > m \geqslant 1$ sont deux entiers positifs et a et b deux nombres complexes, le trinôme $X^n + aX^m + b$ n'admet une racine au moins triple que dans deux cas : ou bien $b = 0$ et $m \geqslant 3$, ou bien $a = b = 0$ et $n \geqslant 3$.

7. Soit $a = (a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ une suite de nombres réels. Le nombre de changements de signe de la suite a est le nombre $V(a)$ de couples d'entiers (i, j) tels que $0 \leqslant i < j \leqslant n$, $a_i a_j < 0$, et $a_k = 0$ pour tout $i < k < j$.
a) Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ un polynôme à coefficients réels. Prouver par récurrence sur le degré de P que le nombre de ses racines strictement positives, comptées avec leur multiplicité, est au plus égal à $V(a)$.
b) En déduire que si un polynôme à coefficients réels possède exactement k coefficients non nuls, alors il possède au plus $k - 1$ racines positives et au plus $2k - 1$ racines réelles distinctes.

8. Soit P un polynôme $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ à coefficients complexes.
a) Prouver que si α est une racine de P, $|\alpha| < 1 + \max\{|a_i|\,;\, 0 \leqslant i \leqslant n-1\}$.
b) On suppose à présent que P est un polynôme à coefficients réels et que α est une racine réelle de P.

b1) Si $a_i \geqslant 0$ pour tout i, on pose $m = -1$ et $B = 0$. Sinon, on pose $m = \max\{i\ ;\ a_i < 0\}$ et $B = \max\{-a_i\ ;\ a_i < 0\}$. Prouver que

$$\alpha < 1 + B^{1/(n-m)}.$$

On pourra supposer que $\alpha > 1$ et remarquer qu'alors $0 \geqslant \alpha^n - B\,(\alpha^m + \cdots + 1)$.

b2) On note r le nombre des indices i tels que $a_i < 0$. Prouver que

$$\alpha \leqslant \max\{(r|a_i|)^{1/(n-i)}\,;\, a_i < 0\}.$$

9. Soit α une racine réelle d'un polynôme P de $\mathbb{Z}[X]$ de degré $d \geqslant 2$ et irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
a) Prouver que pour tout nombre rationnel p/q avec p et q entiers et $q \geqslant 1$, $|P(p/q)| \geqslant 1/q^d$.
b) En déduire qu'il existe une constante $A > 0$ telle que pour tout nombre rationnel p/q, $|\alpha - (p/q)| \geqslant A/q^d$.
Indication : on pourra montrer que la valeur $A = \min(c, \delta)$ convient, où c et δ sont strictement positifs et tels que, si $|t - \alpha| \leqslant \delta$, alors $|P'(t)| \leqslant 1/c$.
Application : le nombre $\sum_n 10^{-n!}$ est transcendant.

10. Soient P_1/Q_1 et P_2/Q_2 deux fractions rationnelles à coefficients complexes dont les fonctions rationnelles associées coïncident sur un ensemble infini $X \subset \{Q_1 \neq 0\} \cap \{Q_2 \neq 0\}$ inclus dans l'intersection de leurs domaines de définition. Prouver que ces deux fractions rationnelles sont égales dans le corps $\mathbb{C}(X)$ des fractions rationnelles.
Préciser si $P_1 = P_2$ et $Q_1 = Q_2$ ou pas forcément.

11. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

$$R_1 = \frac{X^2+1}{X(X^2-1)}, \quad R_2 = \frac{2}{(X-1)(X-2)(X-3)},$$

$$R_3 = \frac{X^5 - X^3 - X^2}{X^2-1}, \quad R_4 = \frac{4X^3}{(X^2+1)^2},$$

et

$$R_5 = \frac{X^6 - X^2 + 1}{(X-1)^2}, \quad R_6 = \frac{3X^2+3}{X^3 - 3X - 2}, \quad R_7 = \frac{X^5}{(X^4-1)^2}.$$

12. Soit α un nombre réel. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ la fraction rationnelle

$$R(x) = \frac{1}{1 - 2\cos(\alpha)x + x^2}.$$

En déduire, pour tout entier naturel n, la dérivée $n$ème de la fonction R.

CAPES de Mathématiques **Université Joseph Fourier**
Préparation à l'écrit **Année 2007-2008**
Algèbre et probabilités

Fiche 13 : Algèbre (7) Espaces vectoriels, dimension, dualité

« Nous autres comédiens sommes les vecteurs de l'imaginaire des réalisateurs. » Nicole Kidman, Studio magazine

1 Vrai ou faux

1. On note $\{f(x, y, z) = 0\}$ la partie de $\mathbb{R}^3$ formée des triplets (x, y, z) tels que $f(x, y, z) = 0$. Déterminer si les parties suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont des sous-espaces vectoriels : $\{2x + 3y = 0\}$, $\{2x + 3y = 4\}$, $\{x^2 + y^2 = 0\}$, $\{x^3 + x = 0\}$, $\{x^2 - y^2 + z^2 = 0\}$, $\{x^2 - 6xy + 9y^2 - z^2 = 0\}$, et $\{x^2 - 6xy + 9y^2 + z^2 = 0\}$.

2. Soit $a = (2, 1, -3)$, $b = (3, 2, -5)$ et $c = (1, 1, -2)$.
a) Les vecteurs a, b et c forment une base de $\mathbb{R}^3$.
b) Le vecteur $x = (5, 2, -7)$ est une combinaison linéaire de a, b et c.

2 Exercices de cours

1. Soient M et N deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. On note $M + N$ le sous-espace vectoriel de E engendré par M et N. En considérant l'application linéaire $f : M + N \to E$ définie par $f(m, n) = m + n$, établir la relation

$$\dim(M) + \dim(N) = \dim(M + N) + \dim(M \cap N).$$

2. a) Soit E et F des espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. Prouver qu'il existe une application linéaire $g : \mathrm{Im}(f) \to E$ telle que $f \circ g$ est l'application identité de $\mathrm{Im}(f)$ dans F.
b) En déduire que E est isomorphe à la somme directe $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ puis que, si E est de dimension finie, $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont de dimension finie et vérifient

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

c) Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Prouver que f est injectif si et seulement si f est surjectif. Préciser si ce résultat subsiste si on ne suppose plus que la dimension de E est finie.

4. Soit k un corps et E un espace vectoriel sur k. On note E^* le dual de E, ensemble des formes linéaires sur E, c'est-à-dire des applications k-linéaires de E dans k.

a) Vérifier que si E est un k-espace vectoriel à gauche, E^* est un k-espace vectoriel à droite pour la loi externe $E^* \times k \to E^*$, $(\varphi, \lambda) \mapsto [x \mapsto \varphi(x)\lambda]$.

a') Vérifier que si E est un k-espace vectoriel à droite, E^* est un k-espace vectoriel à gauche pour la loi externe $k \times E^* \to E^*$, $(\lambda, \psi) \mapsto [x \mapsto \lambda\psi(x)]$.

b) Prouver que l'application $J : E \to (E^*)^*$ définie par $J(x) = [\varphi \mapsto \varphi(x)]$ est linéaire et injective.

c) Si E est de dimension finie n et muni d'une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, on note e_i^* la forme linéaire élément de E^* définie par $e_i^*(e_i) = 1$ et $e_i^*(e_j) = 0$ si $i \neq j$. Prouver que $(e_i^*)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de E^*.

En déduire que si E est de dimension finie alors $\dim(E) = \dim(E^*)$ et l'application canonique J définie en b) est un isomorphisme.

d) Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $e_n = X^n$. Prouver que si φ appartient au sous-espace de E^* engendré par les e_n^* alors il existe un entier $N = N_\varphi$ tel que pour tout polynôme P divisible par X^N, $\varphi(P) = 0$.

Donner un exemple de forme linéaire φ élément de E^* qui n'a pas cette propriété.

En déduire que les formes linéaires $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ ne forment pas une base de E^* et que l'application canonique J définie en b) n'est pas surjective.

5. Soit E et F des espaces vectoriels de dimensions finies n et m munis de bases $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(f_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$ et $f : E \to F$ une application linéaire.

a) Soit A la matrice de f dans les bases $(e_i)_i$ et $(f_j)_j$. Prouver que l'application $f^* : F^* \to E^*$ définie par $\psi \mapsto \psi \circ f$ est linéaire, et que sa matrice dans les bases $(f_j^*)_j$ et $(e_i^*)_i$ est la transposée A^t de la matrice A.

b) Soit A des matrices sur k de tailles respectives $n \times m$ et $m \times p$. Montrer que les transposées A^t et B^t, de tailles respectives $m \times n$ et $p \times m$, vérifient la relation $B^tA^t = (AB)^t$.

Retrouver cette relation en explicitant les matrices A^t, B^t, B^tA^t et $(AB)^t$.

3 Exercices

1. Prouver que les vecteurs

$$a = (1, 2, -1, -2),\ b = (2, 3, 0, -1),\ c = (1, 2, 1, 3),\ d = (1, 3, 1, 0),$$

forment une base de $\mathbb{R}^4$ et donner la décomposition dans cette base du vecteur $x = (7, 13, -1, -2)$.

b) Montrer que les vecteurs a, b et c ci-dessous forment une base de $\mathbb{R}^3$ et trouver les coordonnées du vecteur x par rapport à cette base, dans les deux cas suivants :

b1) $a = (1, 1, 1)$, $b = (1, 1, 2)$, $c = (1, 2, 3)$, $x = (6, 9, 14)$;
b2) $a = (2, 1, -3)$, $b = (3, 2, -5)$, $c = (1, -1, 1)$, $x = (6, 2, -7)$.

2. a) Soit e_i le $i$ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$, dont la $i$ème coordonnée vaut 1 et toutes les autres 0. Prouver que les vecteurs

$$f_0 = e_1 - e_{n+1}, \quad f_i = e_{i+1} - e_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n,$$

engendrent le sous-espace E de $\mathbb{R}^{n+1}$ d'équation $x_1 + \cdots + x_{n+1} = 0$.

b) Prouver que toute partie à n éléments de $\{f_0, \ldots, f_n\}$ est une base de E.
c) Donner l'expression de f_0 dans la base $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.
En déduire la matrice dans la base $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de la restriction à E de la permutation circulaire des coordonnées $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1} \mapsto (x_{n+1}, x_1, \ldots, x_n)$.
d) Donner un suplémentaire de E dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

3. a) Pour $v = (z_1, \ldots, z_n)$ dans $\mathbb{C}^n$, on note $\|v\| = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |z_i|$. Prouver que l'application $\| \cdot \| : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ est une norme sur $\mathbb{C}^n$, c'est-à-dire que l'on a :

1. $\|v\| = 0$ si et seulement si $v = 0$;
2. pour tous v et w dans $\mathbb{C}^n$ et α dans $\mathbb{C}$, $\|\alpha v\| = |\alpha| \, \|v\|$;
3. pour tous v et w dans $\mathbb{C}^n$, $\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$.

b) Soit $1 \leqslant m \leqslant n$. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$, soit $v_i = (z_{i,k})_{1 \leqslant k \leqslant n}$ un vecteur de $\mathbb{C}^n$ tel que

$$|z_{i,i}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |z_{i,j}|$$

Soit $\lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_m v_m = 0$ une relation linéaire entre les v_i. En notant e_i le $i$ème vecteur de la base canonique, vérifier l'égalité

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (v_i - z_{i,i} e_i) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_{i,i} e_i \right\|.$$

En déduire que les vecteurs $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ sont linéairement indépendants.

4. (Suite de l'exercice 3) a) Si $m \leqslant n - 1$, prouver qu'il existe des vecteurs $(v_i)_{m+1 \leqslant i \leqslant n}$ avec, pour tout $m + 1 \leqslant i \leqslant n$,

$$v_i = (z_{i,k})_{1 \leqslant k \leqslant n}, \qquad |z_{i,i}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |z_{i,j}|.$$

b) On suppose que $m = n$, on note $w_j = (z_{k,j})_{1 \leqslant k \leqslant n}$, et on suppose que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mu_j w_j = 0$. Prouver que tous les coefficients μ_j sont nuls.
On pourra considérer un indice $1 \leqslant j_0 \leqslant n$ tel que $|\mu_{j_0}| \geqslant |\mu_j|$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$, puis la $j_0$ème coordonnée de la somme des $\mu_j w_j$.
c) Déduire de a) et b) et de l'exercice de cours 2 une autre solution de l'exercice 3.

5. Pour tout nombre réel α, on note $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_\alpha(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}$.
a) Prouver que la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
b) Soient $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$ des nombres réels et $(a_1, \ldots, a_n)$ un élément non nul de $\overset{n}{R}$. Prouver que l'ensemble des nombres réels $x > 0$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x^{\alpha_i} = 0$ comporte strictement moins de n éléments.
En déduire que pour toute partie infinie $T \subset \mathbb{R}$, la famille $(f_\alpha^T)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ des restrictions f_α^T à T des fonctions f_α est libre dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(T, \mathbb{R})$ des applications de T dans $\mathbb{R}$.

6. Pour $0 \leqslant i \leqslant n$, soit $f_i : E_i \to E_{i+1}$ une application linéaire. On suppose que $E_0 = \{0\} = E_{n+1}$ et que, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $\ker(f_i) = f_{i-1}(E_{i-1})$. Prouver que si les E_i sont de dimension finie alors

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \dim(E_i) = 0.$$

7. Pour tout nombre réel a, on note $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application $g_a(x) = |x - a|$.

a) Soit A une partie finie de $\mathbb{R}$ et $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ les éléments de A. On note E l'espace vectoriel des fonctions dérivables sur $\mathbb{R} \setminus A$ et F l'espace vectoriel des fonctions sur $\mathbb{R} \setminus A$. En considérant l'image de g_{a_n} par l'opérateur de dérivation $D : E \to F$, défini par $D(f) = f'$, et, pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, l'image de $g_{a_{i+1}} - g_{a_i}$, montrer que les fonctions $(g_{a_i})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont linéairement indépendantes dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

b) Prouver que la famille $(g_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est une famille libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

8. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Déterminer l'image et le noyau de l'endomorphisme de dérivation $D : E \to E$ défini par $D(P) = P'$.

9. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Prouver que $\ker(f) = f(E)$ si et seulement si $\dim(E) = 2\dim(f(E))$ et $f^2 = 0$.

10. Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que, pour tout x dans E, il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $f^n(x) = 0$. Prouver que $h = \mathrm{Id}_E - f$ est injective. Pour tout élément x de E, soit $n \geqslant 0$ tel que $f^n(x) = 0$ et

$$g(x) = x + \sum_{i=1}^{n-1} f^i(x).$$

Montrer que cette définition de $g(x)$ ne dépend pas du choix de n et que l'application g ainsi définie est linéaire. Calculer $g \circ h$ et $h \circ g$.

11. La trace d'une matrice carrée $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $M_{n,n}(k)$ est

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Prouver que si A et B sont des matrices de $M_{n,m}(k)$ et $M_{m,n}(k)$, alors les produits AB et BA sont bien définis et que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

b) En déduire que si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $(e_i)_i$, la trace de la matrice de f dans la base $(e_i)_i$ ne dépend pas du choix de la base.

12. a) Pour tous nombres complexes a et b, on note $h_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$. Prouver que l'ensemble $H = \{h_{a,b}\,;\, a, b \in \mathbb{C}\}$ est une sous-algèbre réelle de l'algèbre $M_{2,2}(\mathbb{C})$ des matrices carrées 2×2 à coefficients complexes vue comme algèbre sur $\mathbb{R}$.

On pose $u = h_{\mathrm{i},0}$, $v = h_{0,1}$ et $w = h_{0,\mathrm{i}}$. Calculer, pour tous x et y dans l'ensemble $\{u, v, w\}$, les produits xy. Préciser si l'algèbre H est commutative.

b) Prouver que l'application $\sigma : H \to H$ définie par $\sigma(h_{a,b}) = h_{\overline{a},-b}$ est un morphisme additif tel que, pour tous h et h' éléments de H, $\sigma(hh') = \sigma(h')\sigma(h)$.

c) Prouver qu'il existe une application $n : H \to \mathbb{R}_+$ telle que pour tout élément h de H, $n(h) = 0$ si et seulement si $h = 0$ et $h\sigma(h) = \sigma(h)h = n(h)I_2$. Déduire de cette dernière relation et de b) que n est un morphisme multiplicatif, c'est-à-dire que $n(I_2) = 1$ et, pour tous h et h' éléments de H, $n(hh') = n(h)n(h')$.

d) Déduire de c) que si $h \neq 0$ alors $h^{-1} = n(h)^{-1}\sigma(h)$ est un inverse de h pour la multiplication de H, c'est-à-dire que $hh^{-1} = h^{-1}h = I_2$.

Ainsi H est un « corps non commutatif ». En admettant que la théorie de la dimension a lieu dans les espaces vectoriels sur les corps non commutatifs, vérifier que les questions b), c) et d) de l'exercice de cours 2 sont également vraies quand $K = H$.

e) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & u \\ v & v\,u \end{pmatrix}$. Montrer que $r_g(A) = c_d(A) = 1$ et $r_d(A) = c_g(A) = 2$.

CAPES de Mathématiques
Préparation à l'écrit
Algèbre et probabilités

Université Joseph Fourier
Année 2007-2008

Fiche 14 : Algèbre (8) Matrices et réduction des endomorphismes

« The Matrix is everywhere. It is all around us. Even now, in this very room. » Morpheus, The Matrix

1 Matrices

Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$.

1. Soit $E = M_{2,2}(K)$ et $\sigma : E \to E$ définie par

$$\sigma\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

a) Prouver que σ est un anti-automorphisme involutif d'algèbre, c'est-à-dire que $\sigma^2 = \mathrm{Id}_E$, $\sigma(I_2) = I_2$ et, pour tout élément x de K et tous éléments A et B de E,

$$\sigma(A+B) = \sigma(A) + \sigma(B), \quad \sigma(xA) = x\sigma(A), \quad \sigma(AB) = \sigma(B)\sigma(A).$$

b) Déterminer l'ensemble des points fixes de σ et vérifier que pour toute matrice A dans E, les matrices $A + \sigma(A)$ et $\sigma(A)A$ sont fixés par σ.
c) Déduire de ce qui précède une preuve des identités

$$(ax + bz)(cy + dt) - (ay + bt)(cx + dz) = (ad - bc)(xt - yz),$$

et

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = 0 \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

2. Soit U l'ensemble des matrices $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $M_{n,n}(K)$ telles que, pour tous $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $a_{i,j} = 0$, et, pour tous $1 \leqslant i \leqslant n$, $a_{i,i} = 1$. Soit T l'ensemble des matrices $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $M_{n,n}(K)$ telles que, pour tous $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $a_{i,j} = 0$, et, pour tous $1 \leqslant i \leqslant n$, $a_{i,i} \neq 0$.
Prouver que U et T sont des sous-groupes de $GL_n(K)$ et que U est un sous-groupe distingué de T.

3. Soient A et B deux matrices $n \times n$ telles que $AB = A + B$. Calculer $(I_n - A)(I_n - B)$ en déduire que A et B commutent.

4. a) Soit A une matrice de $M_{n,n}(K)$ telle que pour toute matrice B de $M_{n,n}(K)$, $AB = BA$. Prouver qu'il existe un élément x de K tel que $A = xI_n$.

b) Soit A et B des matrices de $M_{n,n}(K)$. Calculer $\mathrm{Tr}(AB)$. En déduire que si f est une forme linéaire sur $M_{n,n}(K)$, il existe une unique matrice A telle que pour toute matrice X de $M_{n,n}(K)$, $f(X) = \mathrm{Tr}(AX)$.

c) Soit f une forme linéaire sur $M_{n,n}(K)$ telle que pour toutes matrices X et Y de $M_{n,n}(K)$, $f(XY) = f(YX)$. Prouver qu'il existe un élément x de K tel que $f = x\mathrm{Tr}$.

5. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur K et f et g des endomorphismes de E. Montrer que

$$\mathrm{rang}(f) + \mathrm{rang}(g) - \dim(E) \leqslant \mathrm{rang}(f \circ g) \leqslant \min(\mathrm{rang}(f), \mathrm{rang}(g)).$$

6. Soit $n \geqslant 0$ un entier et E l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n.

a) Prouver qu'il existe un endomorphisme f de E tel que, pour tout P dans E,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(P(x)\,\mathrm{e}^{-x}) = f(P)(x)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

b) Déterminer le noyau et l'image de f.

c) Donner la matrice de f dans la base $(X^i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de E.

7. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

8. Pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$ on pose $a_{i,j} = 1$ si $j = i + 1$ et $a_{i,j} = 0$ si $j \neq i + 1$.

a) Écrire sous forme de tableau la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, calculer A^k.

b) Soit x dans K, calculer l'inverse de la matrice $M(x) = (m_{i,j}(x))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ définie par $m_{i,j}(x) = x^{j-i}$ si $j \geqslant i$ et $m_{i,j}(x) = 0$ si $j < i$.

9. Soit $n \geqslant 2$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ définie par $m_{i,i} = 0$ et $m_{i,j} = 1/(n-1)$ pour tous $i \neq j$. Calculer M^2. En déduire que M est inversible et calculer M^{-1}.

10. On rappelle que K désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$ et on se donne r vecteurs colonnes $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$, donc chaque v_i est un élément de $M_{n,1}(K)$.

a) On suppose que les vecteurs $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ sont K-linéairement indépendants. On note M la matrice de $M_{n,r}(K)$ dont la $i$ème colonne vaut v_i. Prouver qu'il existe une matrice N appartenant à $M_{r,n}(K)$ telle que $NM = I_r$. En déduire que, vus comme vecteurs dans $M_{n,1}(\mathbb{C})$, les vecteurs $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendants.

b) Établir l'égalité des rangs sur K et sur $\mathbb{C}$ de la famille $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$.

11. Soit $AX = B$ un système linéaire à coefficients dans un sous-corps K de $\mathbb{C}$, donc A et B sont des éléments de $M_{m,n}(K)$ et $M_{m,1}(K)$ donnés et l'élément X de taille $n \times 1$ est l'inconnue.

On note $\mathcal{S}(\mathbb{C})$ l'ensemble des solutions du système dans $M_{n,1}(\mathbb{C})$, et $\mathcal{S}(K) = \mathcal{S}(\mathbb{C}) \cap M_{n,1}(K)$ l'ensemble des solutions du système dans $M_{n,1}(K)$.
Montrer que $\dim_K \mathcal{S}(K) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S}(\mathbb{C})$.

12. a) Prouver que si X est une matrice $n \times n$ à coefficients dans K, $X^t X = I_n$ si et seulement si $XX^t = I_n$.
b) Prouver que l'ensemble des matrices X de $M_{n,n}(K)$ telles que $XX^t = I_n$ est inclus dans $GL_n(K)$ et forme un sous-groupe de $GL_n(K)$.

2 Réduction des endomorphismes

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps K et f un endomorphisme de E.
a) Soit v un vecteur non nul de E. Soit E_v le sous-espace vectoriel de E engendré par v et par tous les $f^k(v)$ pour $k \geqslant 1$. Soit d la dimension de E_v. Montrer qu'il existe des coefficients a_i tels que
$$a_0 v + a_1 f(v) + \cdots + a_{d-1} f^{d-1}(v) + f^d(v) = 0.$$
b) On note $P_v = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_0$.
Prouver que $P_v(f) = f^d + a_{d-1}f^{d-1} + \cdots + a_0 \mathrm{Id}_E$ induit sur E_v l'endomorphisme nul.
c) Prouver que f induit un endomorphisme de l'espace quotient E/E_v.
d) Prouver qu'il existe une base $(e_i)_{1\leqslant i \leqslant n}$ de E telle que $e_1 = v$ et, pour tout $2 \leqslant i \leqslant d$, $e_i = f^{i-1}(v)$. Écrire la matrice de f dans cette base et en déduire une autre solution de c).
e) Déduire de ce qui précède, en raisonnant par récurrence sur la dimension de E, qu'il existe un polynôme P de $K[X]$ de degré au plus $\dim(E)$ tel que $P(f) = 0$.

2. a) Soit $C = (c_{i,j})_{i,j}$ la matrice de taille $n\times n$ telle que $c_{i,i-1} = 1$ pour tout $2 \leqslant i \leqslant n$, $c_{i,n} = a_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, et $c_{i,j} = 0$ pour tous les autres couples (i,j). Calculer un polynôme P de $K[X]$ de degré n tel $P(C) = 0$.
b) Soit E un espace vectoriel de dimension n et f et g deux endomorphismes de E. On suppose qu'il existe un polynôme de degré n et des vecteurs v et w de E tels que $P(f) = P(g) = 0$ et tels que $(v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v))$ et $(w, g(w), \ldots, g^{n-1}(w))$ sont tous deux linéairement indépendants.
Montrer que f et g sont conjugués, c'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme $\varphi : E \to E$ tel que $f = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$.
c) Soit f et g les endomorphismes de $\mathbb{C}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer les polynômes caractéristiques de f et g. Préciser si f et g sont conjugués ou non.

3. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur un corps K et P un polynôme de $K[X]$ tel que $P(f) = 0$. Un élément a de K est une valeur propre de f s'il existe un vecteur v non nul de E tel que $f(v) = av$.
Prouver que, si a est une valeur propre de f, $P(a) = 0$.
En déduire que, si E est de dimension finie n, les valeurs propres de f sont en nombre au plus n.

4. Soit E un espace vectoriel et f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\ker(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont stables par f, c'est-à-dire que $f(\ker(g)) \subset \ker(g)$ et $f(\mathrm{Im}(g)) \subset \mathrm{Im}(g)$.

5. a) **Théorème des noyaux** Soit A et B deux polynômes de $K[X]$ premiers entre eux et $P = AB$, E un espace vectoriel de dimension finie sur K, et f un endomorphisme de E. Montrer que

$$\ker(P(f)) = \ker(A(f)) \oplus \ker(B(f)).$$

b) En déduire qu'un endomorphisme f d'un espace vectoriel de dimension finie est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme P de $K[X]$, scindé et sans racines multiples, tel que $P(f) = 0$.

On rappelle que P est scindé si P est un multiple d'un produit de monômes $X - a_i$ avec a_i dans K.

6. Soit E un espace vectoriel et f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$.

a) Montrer que les espaces propres de f sont stables par g, d'abord directement, puis en utilisant l'exercice 4.

a') Même question pour les espaces $E_i(a, f)$ définis, pour a dans K et i dans $\mathbb{N}$, par $E_i(a, f) = \ker((a\mathrm{Id}_E - f)^i)$.

b) En déduire que si E est de dimension finie et si f et g sont diagonalisables, alors f et g sont diagonalisables dans la même base.

c) Application : résoudre l'équation $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ dans $M_{3,3}(\mathbb{C})$.

c') résoudre l'équation $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ dans $M_{3,3}(\mathbb{C})$.

7. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et f un endomorphisme de E tel que $f \circ f = -\mathrm{Id}_E$. Prouver que f est diagonalisable.

8. Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices $(a_{i,j})_{i,j}$ de $M_{n,n}(\mathbb{R})$ telles que pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $0 \leqslant a_{i,j} \leqslant 1$, et, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

Prouver que si M et N appartiennent à $\mathcal{M}$, MN aussi, et que tout M dans $\mathcal{M}$ admet 1 pour valeur propre.

CAPES de Mathématiques
Préparation à l'écrit
Algèbre et probabilités

Université Joseph Fourier
Année 2007-2008

Fiche 15 : Algèbre (9) Déterminants

« Faire des mathématiques, c'est donner le même nom à des choses différentes. » Henri Poincaré

1 Rappels de cours

Soit V un espace vectoriel sur un corps K. Une forme n-linéaire sur V est une application $f : V^n \to K$ telle que, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et pour tout choix de vecteurs $(v_j)_{j \neq i}$ de V, l'application

$$v \mapsto f\left(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_n\right),$$

est linéaire. La forme f est alternée si $f(v_1, \ldots, v_n) = 0$ dès que $v_i = v_j$ pour au moins une paire d'indices $j \neq i$. En ce cas, pour tout élément s de $\mathfrak{S}_n$,

$$f(v_{s(1)}, \ldots, v_{s(n)}) = \varepsilon(s) f(v_1, \ldots, v_n),$$

où $\varepsilon(s)$ désigne la signature de la permutation s. On note $\mathfrak{A}_n(V)$ l'espace vectoriel des formes n-linéaires alternées sur V.
Si $V = K^n$, le déterminant sur K^n est la forme det définie sur $\mathfrak{A}_n(K^n)$ comme suit : pour tout choix de n vecteurs $v_i = (v_{i,j})_{1 \leqslant j \leqslant n}$ de K^n,

$$\det(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{s \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(s) v_{1,s(1)} \cdots v_{n,s(n)}.$$

Une définition équivalente est que det est l'unique forme n-linéaire alternée telle que

$$\det(e_1, \ldots, e_n) = 1,$$

où $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ désigne la base canonique de K^n.
Pour tout espace vectoriel V de dimension finie d et pour tout $n \geqslant 1$, la dimension de $\mathfrak{A}_n(V)$ vaut 0 si $n \geqslant d+1$ et $\binom{d}{n}$ si $n \leqslant d$. En particulier cette dimension vaut 1 si $n = d$, donc $\mathfrak{A}_d(V)$ est engendré par la forme déterminant dans une base quelconque et les formes déterminants dans deux bases différentes sont proportionnelles.
Tout morphisme d'espaces vectoriels $f : V \to W$ induit, pour tout $n \geqslant 1$, un endomorphisme $\mathfrak{A}_n(f) : \mathfrak{A}_n(W) \to \mathfrak{A}_n(V)$, défini par

$$\mathfrak{A}_n(f)(\alpha)(v_1, \ldots, v_n) = \alpha(f(v_1), \ldots, f(v_n)).$$

Dans le cas où $V = W$, le déterminant d'un endomorphisme f d'un espace vectoriel V de dimension d est l'unique élément $\det f$ de K tel que pour tout α dans $\mathfrak{A}_d(V)$,

$$\mathfrak{A}_d(f)(\alpha) = (\det f) \cdot \alpha.$$

Si $V = K^d$ et si M est la matrice de f dans la base canonique,

$$\det f = \det(C_1, \ldots, C_d),$$

où C_i désigne la $i$ème colonne de la matrice M. On note ce nombre $\det M$.

Une conséquence est que $\det f \circ g = \det f \cdot \det g$ pour tous endomorphismes f et g. En particulier, $\det MN = \det M \cdot \det N$ pour tout $n \geqslant 1$ et toutes matrices M et N de taille $n \times n$.

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice $n \times n$. Pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant n$, soit $M_{i,j}$ la matrice obtenue à partir de M en effaçant la $i$ème ligne et la $j$ème colonne. Donc $M_{i,j}$ est de taille $(n-1) \times (n-1)$ et le coefficient (a, b) de $M_{i,j}$ est $m_{a,b}$ si $a < i$ et $b < j$, $m_{a,b+1}$ si $a < i$ et $b \geqslant j$, $m_{a+1,b}$ si $a \geqslant i$ et $b < j$, et $m_{a+1,b+1}$ si $a \geqslant i$ et $b \geqslant j$. Pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant n$, le cofacteur (i, j) de M est

$$C_{i,j}(M) = (-1)^{i+j} \det M_{i,j}.$$

La matrice des cofacteurs de M est $C(M) = (C_{i,j}(M))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. On a

$$MC(M)^t = C(M)^t M = \det M \, I_n.$$

Le développement du déterminant de M suivant la ligne i ou suivant la colonne i donne le $i$ème terme diagonal de cette relation. Quant aux termes non diagonaux, le terme (i, j) avec $i \neq j$ s'obtient en développant le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant dans M la colonne j par la colonne i et en développant le déterminant obtenu, qui est nul puisque deux de ses colonnes sont égales, par rapport à la ligne i.

2 Exercices de cours

1. Soit V un espace vectoriel, $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de vecteurs linéairement dépendants et f une forme de $\mathfrak{A}_n(V)$. Prouver que $f(v_1, \ldots, v_n) = 0$.

2. Prouver que la forme det définie par une somme sur $\mathfrak{S}_n$ dans les rappels de cours appartient à $\mathfrak{A}_n(K^n)$.

3. Prouver que $\varepsilon(s^{-1}) = \varepsilon(s)$ pour tout élément s de $\mathfrak{S}_n$. En déduire que, pour toute matrice M de taille $n \times n$, $\det M^t = \det M$.

4. Soit M une matrice $n \times n$. On considère la matrice $B = XI_n - M$, donc B appartient à l'algèbre $M_{n,n}(K[X])$ des matrices $n \times n$ à coefficients dans l'anneau des polynômes $K[X]$. On considère le polynôme caractéristique de M, défini par

$$\chi_M(X) = \det B = \det(XI_n - M).$$

Donc $\chi_M(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ pour certains coefficients a_i dans K. Enfin, soit C la matrice des cofacteurs de B.

a) Prouver qu'il existe des matrices A_i éléments de $M_{n,n}(K)$, telles que

$$C^t = A_{n-1}X^{n-1} + \cdots + A_0.$$

b) Utiliser l'identité $C^t B = \det(B) \, I_n$ dans $M_{n,n}(K[X])$ pour exprimer les coefficients a_i de $\chi_M(X)$ en fonction de M et des matrices A_i.

c) En déduire une « preuve matricielle » du théorème de Cayley-Hamilton, selon lequel

$$\chi_M(M) = 0_n, \qquad \text{avec } \chi_M(M) = M^n + a_{n-1}M^{n-1} + \cdots + a_0 I_n.$$

3 Exercices

1. a) Soit $M = \begin{pmatrix} 0_n & N \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$ dans $M_{2n,2n}(K)$. Déterminer $\det M$ en fonction de $\det N$. On pourra consisidérer la matrice $\begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$.

b) Soient A, B, C et D quatre matrices de $M_{n,n}(K)$ telles que l'une d'entre elles est nulle. Dans les quatre cas, calculer le déterminant de $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ dans $M_{2n,2n}(K)$.

c) Avec les notations de a), déterminer le polynôme caractéristique de la matrice M en fonction de celui de la matrice N.

2. a) Soient A et B des éléments de $M_{n,n}(\mathbb{R})$ tels que $A + \mathrm{i}B$ est inversible dans $M_{n,n}(\mathbb{C})$. Prouver qu'il existe un réel x tel que $A + xB$ est inversible.

b) Soient M et N des éléments de $M_{n,n}(K)$. Prouver que M et N sont semblables si et seulement si l'ensemble $C(M,N)$ des matrices X de $M_{n,n}(K)$ telles que $XM = NX$ contient une matrice inversible.

c) Déduire de b) et de l'exercice 11 de la fiche 14 que si $K \subset \mathbb{C}$ et si les matrices M et N sont semblables sur $\mathbb{C}$, M et N sont semblables sur K.

d) Application. Prouver qu'une matrice carrée à coefficients réels est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et si toutes ses valeurs propres sont réelles.

3. Pour tout $n \geqslant 1$ et tout élément $x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de K^n, on note $V(x)$ le déterminant de la matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ définie par $m_{i,j} = x_i^{j-1}$.

a) Calculer $V(x_1)$, $V(x_1, x_2)$ et $V(x_1, x_2, x_3)$.

b) On suppose que, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $V(x_1, \dots, x_k) \neq 0$.

Prouver que $V(x_1, \dots, x_n)$ est un polynôme en x_n dont on déterminera le degré et les racines.

En déduire une relation de récurrence entre $V(x_1, \dots, x_k)$ et $V(x_1, \dots, x_{k-1})$ puis la valeur de $V(x_1, \dots, x_n)$.

c) Dans le cas général, donner la valeur de $V(x_1, \dots, x_n)$.

4. Soit V un espace vectoriel de dimension n sur un corps K et $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de V. Soit f une forme bilinéaire alternée sur V. On suppose que $a = 0$ est le seul vecteur de V tel que pour tout x dans V, $f(a,x) = 0$.

a) Soit $A = (f(a_i, a_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Prouver que A est inversible.

b) Soient a et b des vecteurs de V tels que $f(a,b) \neq 0$. On pose $f_a(x) = f(a,x)$ et $f_b(x) = f(b,x)$. Prouver que f_a et f_b sont des formes linéaires non proportionnelles et que l'ensemble des vecteurs x de V tels que

$$(*) \qquad f(a,x) = 0 = f(b,x),$$

est un sous-espace vectoriel de V de dimension $n-2$.

c) Prouver que V est somme directe du sous-espace engendré par a et b et du sous-espace W des solutions de $(*)$. Prouver que si un vecteur z de W est tel que, pour tout vecteur y de W, $f(z,y) = 0$, alors $z = 0$.

d) En raisonnant par récurrence sur la dimension, prouver que la dimension de V est paire, soit $2p$, et qu'il existe une base de V composée des vecteurs a_i et b_i pour $1 \leqslant i \leqslant p$, telle que, pour

$1 \leqslant i,j \leqslant p$, $f(a_i,a_j) = f(b_i,b_j) = 0$, pour $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, $f(a_i,b_j) = f(b_j,a_i) = 0$, et pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $f(a_i,b_i) = 1 = -f(b_i,a_i)$.
e) Une matrice carrée $A = (\alpha_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est alternée si, pour tous $1 \leqslant i,j \leqslant n$,

$$\alpha_{i,i} = 0, \qquad \alpha_{i,j} + \alpha_{j,i} = 0.$$

Prouver que si une matrice alternée est inversible, sa taille $n = 2p$ est paire et il existe une matrice U dans $GL_n(K)$ telle que $U^tAU = \begin{pmatrix} 0_p & I_p \\ -I_p & 0_p \end{pmatrix}$.

f) Prouver que pour tous x, y et z dans K, $\begin{vmatrix} 0 & x & z \\ -x & 0 & y \\ -z & -y & 0 \end{vmatrix} = 0$.

5. Calculer les déterminants

$$D_3 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & b & 0 \\ 0 & 2a & b \end{vmatrix}, \qquad D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p & q \\ 3 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & p \end{vmatrix},$$

et

$$D_7 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & a & b \\ 1 & 0 & -2a & -8b & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2a & -8b & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2a & -8b & a^2 \end{vmatrix}.$$

6. Soit $n \geqslant 3$ et $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ des éléments de K^n. Pour tous $1 \leqslant i,j \leqslant n$, on pose $a_{i,j} = 1 + x_iy_j$. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Montrer que $\det A = 0$.

7. Pour tout $n \geqslant 1$, on note D_n le déterminant $n \times n$ suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

Pour tout $n \geqslant 1$, établir une relation de récurrence entre D_{n+2}, D_{n+1} et D_n. Déterminer toutes les suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 1}$ qui vérifient la même relation de récurrence. En déduire la valeur de D_n pour tout $n \geqslant 1$.

8. Calculer le déterminant 8×8 ci-dessous :

$$D_8 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$