Université Joseph Fourier **Année 2006-2007**

Préparation au CAPES de Mathématiques

Quelques principes de rédaction mathématique

Ce texte s'inspire fortement d'un texte similaire mis à la disposition des étudiants par Christophe Champetier mais les vues qui sont exprimées ici ne sont pas de sa responsabilité.

Règle 1 : Définir clairement les objets qu'on utilise

> *Tout caractère ($x, t, n, a, f, i, A, F, \alpha, \phi, \mathbb{N}$, etc.) désignant un objet mathématique (élément, ensemble, fonction, etc.) doit impérativement être présenté et clairement défini avant d'être utilisé.*

Ce principe élémentaire est fondamental pour qu'une phrase, en particulier dans un raisonnement mathématique, ait un sens.

Par exemple à tout moment d'une rédaction, si on écrit « $f(x) \geqslant 0$ », ou bien « la suite réelle (a_n) est majorée par C », il faut *auparavant* avoir dit ce que sont f, x, (a_n) et C. Sinon, au mieux le raisonnement n'est pas clair, au pire il n'a pas de sens, et dans les deux cas il risque d'être interprété comme faux.

Autrement dit, on ne parle pas de quelque chose tant qu'on n'a pas dit ce que c'était. Dans un raisonnement, une variable, notée par exemple x, f, (a_n), k ou ϵ, désigne un ensemble ou un élément d'un ensemble, qui a été lui-même précédemment défini, par exemple $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ ou l'ensemble des suites réelles. Sauf dans les cas de raisonnement par l'absurde (précisément !), on vérifiera que l'ensemble dans lequel on prend la variable n'est pas vide, sinon le raisonnement est vraisemblablement absurde ou faux.

Présentation d'un symbole

Un symbole représente un objet souvent présenté par un quantificateur.

Par exemple on dira dans une phrase : « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, ... »

Si la suite du raisonnement est trop longue, on commencera la preuve par : « Soit $x \in \mathbb{R}$ [quelconque]. » On notera en passant que ces deux formulations se ressemblent beaucoup mais qu'elles ne signifient pas exactement la même chose (voir plus loin).

« $\forall \epsilon > 0$, ... » signifie : « Pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$, ... »

D'autres exemples :

« Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\cos x = \sin x$. »

« Soit $x \in [0, \pi]$ tel que $\cos x = \sin x$. »

Ce genre d'expression sous-entend souvent (c'est le cas ici) que l'ensemble considéré n'est pas vide. La phrase est intéressante car l'ensemble des réels dans l'intervalle $[0, \pi]$ dont le cosinus est égal au sinus n'est pas vide. On peut alors prendre un élément x de cet ensemble. En fait, pour être vraiment précis, quand l'ensemble considéré est non vide, il *faut* le rappeler ou le démontrer. Cela garantit que le raisonnement a un intérêt (raisonner sur des choses qui n'existent pas peut être correct mais n'est pas très intéressant, le cas du raisonnement par l'absurde mis à part).

Exemples de formulation :

« Soit $x \in \mathbb{R}$. » (sous-entendu x quelconque)

« Soit x un réel vérifiant la propriété P. »

« $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x - (\pi/2)) = \sin x$. »

« Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos((\pi/2) - x) = \sin x$. »

« $\exists x \in \mathbb{R},\ \cos x = \sin x$. »

« $\exists x \in [0, \pi],\ \cos x = \sin x$. »

« $\forall x \in [0, \pi],\ ((\cos x = \sin x) \Rightarrow x = \pi/4)$. »

« Pour tout $x \in [0, \pi]$, si $\cos x = \sin x$, alors $x = \pi/4$. »

« $\forall \epsilon > 0,\ \exists x > 0,\ x/(x+1) > 1 - \epsilon$. »

Sans les quantificateurs qui introduisent x, ces phrases n'auraient pas de sens. Par exemple les phrases :

« $(\cos x = \sin x) \Rightarrow x = \pi/4$ »

ou

« $(\cos x = \sin x) \Rightarrow x = (\pi/4) + k\pi$ »

n'ont aucun sens si x et k ne sont pas présentés avant d'être utilisés.

Une cause fréquente des erreurs de raisonnement rencontrées dans les copies est le non-respect de cette règle : une variable n'est pas définie (impossible de comprendre dans quel ensemble elle varie) ou bien l'ensemble dans lequel elle varie change au milieu de la preuve (par exemple une constante devient soudain une variable quelconque).

Règle 2 : La manipulation des objets mathématiques obéit à des critères précis imposés par leur définition

Par exemple, un nombre complexe, la somme de deux fonctions réelles, la dérivée d'une fonction réelle, une suite numérique sont des objets qui sont précisément définis. Ainsi une fonction (notée par exemple f) est la donnée d'un ensemble de départ, d'un ensemble d'arrivée et pour chaque élément (noté par exemple x) de l'ensemble de départ d'un (unique) élément (noté par exemple $f(x)$) de l'ensemble d'arrivée.

Les objets mathématiques ne sont pas des morceaux de théorèmes, ni des théorèmes que l'on imbrique pour faire des preuves, mais bien des objets en soi qui ont été précisément décrits. Il faut donner un sens à ces objets, à l'aide d'exemples, de représentations visuelles, etc. Mais ce sens ne permet pas d'écrire des preuves rigoureuses, une preuve étant un discours plus ou moins formel obéissant lui aussi à des règles précises qui sont celles de la logique mathématique.

Règle 3 : Ne pas hésiter à faire des phrases en français

Il est plus agréable, et souvent plus facile, de lire un raisonnement écrit en français qu'avec des symboles logiques.

Par exemple, $(\exists x \in [0, \pi],\ \cos x = \sin x)$ ne signifie pas qu'on a fixé $x = \pi/4$, mais seulement qu'il existe un réel dans l'intervalle $[0, \pi]$ dont le cosinus est égal au sinus. *La lettre x n'a plus aucun sens au-delà de la phrase mathématique* $(\exists x \in [0, \pi],\ \cos x = \sin x)$. Si on veut appeler x un tel réel pour la suite du raisonnement, on dirait en français : « Il existe un réel dans l'intervalle $[0, \pi]$ dont le cosinus est égal au sinus, soit x un tel réel » (ou alors soit x un réel dans l'intervalle $[0, \pi]$ dont le cosinus est égal au sinus).

On peut dire « Soit x un réel tel que $\cos x = \sin x$ (un tel x existe). On a alors $\tan x = 1$ ».

L'écriture « pseudo-mathématique » :

$\exists x \in \mathbb{R}\ \ \cos x = \sin x$

$\Rightarrow \tan x = 1$

n'a aucun sens. On pourrait dire :

$(\exists x \in \mathbb{R},\ \cos x = \sin x)$

$\Rightarrow (\exists x \in \mathbb{R},\ \tan x = 1)$, mais c'est très lourd.

Nota : Le français littéraire autorise parfois à placer le quantificateur à la fin de la phrase, par exemple : « $\cos(x - (\pi/2)) = \sin x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ». Cela peut conduire à des ambiguités, donc c'est à éviter dans une rédaction mathématique.

Exercice : Montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ (|x - y| < \eta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < \epsilon).$$

Règle 4 : Utiliser correctement les symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$

Ici, « correctement » signifie qu'on devrait presque toujours se passer des symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ et les remplacer par les mots *donc*, *ainsi*, *ce qui équivaut* *à*, etc. En effet l'utilisation de $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ ne devrait s'inscrire que dans un cadre très rigoureux de syntaxe logique : ces symboles devraient se trouver entre deux propositions très clairement délimitées, par exemple placées entre parenthèses.

Exemple : La phrase $(\forall x \in E,\ f(x) = g(x) \Rightarrow f = g)$ est ambigüe, donc n'a aucun sens sauf convention, car elle pourrait signifier :

$$(\forall x \in E,\ f(x) = g(x)) \Rightarrow f = g,$$

ou bien :

$$\forall x \in E,\ (f(x) = g(x) \Rightarrow f = g).$$

Suivant le contexte, ces deux implications peuvent être vraies, mais en tout cas leurs significations sont très différentes.

Ainsi l'utilisation des symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ dans les copies, en début de ligne et sans aucune référence à *quoi* implique *quoi*, est en général peu claire ou incorrecte.

Exercice : Étudier la véracité des différentes propositions obtenues en mettant des parenthèses à la phrase suivante :

$$\forall x \in [0, \pi[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \sin(nx) < 1/2 \ \Rightarrow\ x = 0.$$

La syntaxe logique est très lourde et on lui préfèrera presque toujours la rédaction en français. Exemples :

Si pour tout $x \in E$ on a $f(x) = g(x)$, *alors* $f = g$.

Soit $x \in E$. *Si* $f(x) = g(x)$, *alors* $f = g$.

Soit $x \in [0, \pi[$. *Si* pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\sin(nx) < \frac{1}{2}$, *alors* $x = 0$.

Noter également une nuance entre *donc* et *implique* : la phrase mathématique $(P \Rightarrow Q)$ signifie que si P est vraie, alors Q est vraie (autrement dit soit P est fausse, soit Q est vraie, ou encore (non$P$ ou Q)). Elle ne suppose pas a priori que P est vraie. Dans un raisonnement on affirmera souvent : P est vraie, donc Q est vraie, ce qui n'a pas la même signification.

Enfin le symbole $\Leftrightarrow$ est régulièrement utilisé de manière incorrecte : quand on l'utilise, il faut *impérativement* vérifier (mentalement et les justifier si elles ne sont pas triviales toutes les deux) les deux implications $\Rightarrow$ et $\Leftarrow$.

Règle 5 : Être concis

Il faut apprendre, par exemple en travaillant les démonstrations du cours et des TD, à distinguer le plus clairement possible les arguments essentiels d'une preuve, les idées importantes et nouvelles s'il y en a, dans un contexte d'arguments considérés comme « évidents » (ou triviaux, immédiats, clairs, etc.) par l'enseignant-correcteur. Pour l'enseignant dire qu'une affirmation est « évidente » ne signifie pas qu'elle est « intuitive », mais qu'elle résulte d'une preuve sans idée nouvelle, souvent une simple application des définitions, résultant d'une vérification calculatoire ou d'une méthode classique.

Dans un devoir, surtout en temps limité, il est inutile de recopier un énoncé, un théorème de cours ou une définition. C'est purement et simplement une perte de temps car on peut supposer que le correcteur connaît le cours ou l'énoncé de la question ! Cela dit, le niveau de rédaction d'une copie doit se situer au niveau de compréhension de l'étudiant : il vaut mieux une copie où tout est démontré en plus de lignes que le minimum nécessaire, qu'une copie où il manque des arguments indispensables. Savoir rédiger correctement une preuve s'acquiert en travaillant le cours et en maîtrisant les notions acquises précédemment.

La rédaction d'une preuve mathématique consiste seulement à *convaincre* le lecteur de la justesse du raisonnement amenant à la conclusion. Personne n'écrit de preuve *complète*, c'est-à-dire lisible par un ordinateur à qui on aurait appris les règles de logique mathématique, et il arrive qu'on puisse convaincre beaucoup de monde avec un raisonnement faux. Pour l'étudiant, il s'agit de convaincre un correcteur qu'il a compris un raisonnement, et qu'il pourrait justifier toutes ses affirmations. Cela impose de n'oublier aucun argument. Avec de l'habitude et de l'expérience, on pourra parfois gagner du temps en donnant certains arguments sans autre justification qu'ils sont « évidents » à vérifier.

. . . Et comme ce texte déroge déjà amplement à la Règle 5, on s'arrêtera là.