Chapitre 3. Produits scalaires

peut être de dimension infinie.

① Définition, exemples

Déf. Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ une FBS.

φ est dite
- • positive si $\overset{q_\varphi(v)}{\varphi(v,v)} \geq 0$ pour tout $v \in V$
- • définie positive si elle est positive et $\varphi(v,v) = 0 \Rightarrow v = 0$.

Une FBS définie positive s'appelle aussi un produit scalaire

on notera alors souvent
$\langle v, w \rangle = \varphi(v,v)$
$(\|v\|^2 = \varphi(v,v)$, càd $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.)

Le couple $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ s'appelle alors un espace pré-Hilbertien (ou espace euclidien).

Rem: Si V est de dimension finie, disons $\dim V = n$,
φ est définie positive $\Leftrightarrow$ φ est de signature $(n,0)$
$\Leftrightarrow$ φ est positive et $\ker \varphi = \{0_V\}$.

$\boxed{\begin{array}{l} q_\varphi(v) = \lambda_1 L_1^2(v) + \dots + \lambda_r L_r^2(v) \\ \text{est positif pour tout } v \\ \Leftrightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_r \geq 0 \\ \text{et si } r \neq n \text{ on trouve un elt dans le noyau} \end{array}}$

Exemples.

1) Le produit scalaire usuel de $\overset{\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}}{v}, \overset{\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}}{w} \in \mathbb{R}^n$

$$\langle v, w \rangle = \sum_{j=1}^{n} v_j w_j .$$

2) $V = C^0([a,b], \mathbb{R})$ ← l'exemple clé pour la théorie des séries de Fourier.

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt .$$

- • $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$ pour tous $f_1, f_2, g \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- • $\langle f_1 + f_2, g \rangle = \int_a^b (f_1 + f_2)(t)\, g(t)\, dt$

$$= \int_a^b (f_1(t) + f_2(t))\, g(t)\, dt$$
$$= \int_a^b f_1(t) g(t) + f_2(t) g(t)\, dt$$
$$= \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle$$

- $\langle \lambda f, g \rangle = \int_a^b (\lambda f)(t) g(t)\, dt$

$$= \int_a^b \lambda f(t) g(t)\, dt = \lambda \int_a^b f(t) g(t)\, dt$$
$$= \lambda \langle f, g \rangle$$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une FBS.

Cette FBS est un produit scalaire:

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f(t) f(t)\, dt$$
$$= \int_a^b \underbrace{f(t)^2}_{\geq 0} dt \geq 0$$

et si $\langle f, f \rangle = 0$, $\int_a^b \underbrace{f(t)^2}_{\text{fonction continue, positive}} dt = 0$

(Exo ?) alors $f(t)^2 = 0$ pour tout $t \in [a, b]$

donc $f(t) = 0$ pour tout $t \in [a, b]$

càd $f = 0_V$.

3) plus généralement, si ~~[illegible]~~ un fixé $p \in V$ ~~est~~ une fonction strictement positive $p(t) > 0$ pour tout t, alors

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b p(t) f(t) g(t)\, dt$$

définit un produit scalaire sur $V = C^0([a, b], \mathbb{R})$.

4) $V = M_n(\mathbb{R})$

$$\varphi(A, B) = \mathrm{tr}({}^tA \cdot B) = \sum_{k=1}^{n} ({}^tA \cdot B)_{kk}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} ({}^tA)_{kj} B_{jk}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{jk} \cdot B_{jk}$$

est un produit scalaire

(via l'isomorphisme $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$, c'est juste le produit scalaire usuel).

5) $V = \mathbb{R}[X]$

$\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(P,Q) = P(0)Q(0)$ est bilinéaire symétrique, mais ce n'est pas un produit scalaire

$$\varphi(X,X) = 0 \text{ mais } X \neq 0.$$

2 Propriétés géométriques.

Soit $V, \langle \cdot,\cdot \rangle$ un espace pré-hilbertien, càd.
$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(v,w) \longmapsto \langle v,w \rangle$$
est une FBS définie positive,
$\|v\| = \sqrt{\langle v,v \rangle}$ s'appelle la <u>norme déduite</u> du produit scalaire.

noter que pour tous $v \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\|\lambda v\| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle v,v \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle v,v \rangle} = |\lambda| \, \|v\|.$$

Grâce à la norme, on définit une notion de <u>distance</u> sur V:
$$d(v,w) = \|v - w\|$$
↳ ceci est un réel ≥ 0, nul $\Longleftrightarrow v = w$.

<u>Prop</u> (Inégalité de Cauchy-Schwarz) $\|\cdot\|$ norme déduite de $\langle \cdot,\cdot \rangle$

Soit $V, \langle \cdot,\cdot \rangle$ un espace pré-hilbertien. Alors pour tout $v,w \in V$, on a
$$|\langle v,w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$
avec égalité $\Longleftrightarrow \{x,y\}$ est une famille liée.

preuve: on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq f(t) = \langle v+tw, v+tw \rangle$$
$$= \|v\|^2 + 2t\langle v,w\rangle + t^2\|w\|^2$$

(discriminant ≤ 0). donc $(\langle v,w\rangle)^2 - \|v\|^2\|w\|^2 \leq 0$.

càd $|\langle v,w\rangle| \leq \|v\|\,\|w\|$.

si égalité, le discriminant est nul, donc il existe un t t.q. $\|v+tw\|=0$

càd $v+tw=0$ CQFD.

en particulier, on peut définir l'angle entre deux vecteurs non nuls (par rapport au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$)

$$\boxed{\cos(\measuredangle(v,w)) = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\,\|w\|}}.$$

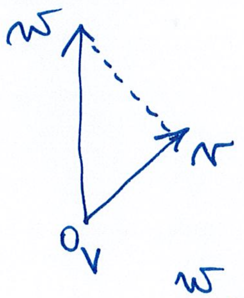
si $\langle v,w\rangle = 0$, $\measuredangle(v,w) = \frac{\pi}{2}$ et on dit que v,w sont orthogonaux.

Prop. (th de Pythagore).

Soit $V, \langle\cdot,\cdot\rangle$ pré-hilbertien, $v,w \in V$, $\neq 0_V$, $d: V\times V \to \mathbb{R}$ la distance ~~distance~~ induite.

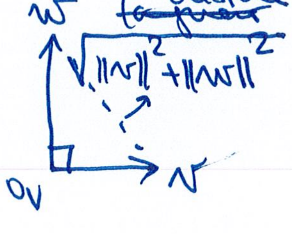
Alors $d(v,w)^2 = d(0_V,v)^2 + d(0_V,w)^2$

$$\Leftrightarrow \measuredangle(v,w) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \langle v,w\rangle = 0.$$



en effet:

$$d(v,w)^2 = \|v-w\|^2 = \|v\|^2 - 2\langle v,w\rangle + \|w\|^2$$
$$= d(0_V,v)^2 + d(0_V,w)^2 - 2\langle v,w\rangle.$$



Plus généralement : (Pythagore généralisé).

Prop : Soient $v_1,\dots,v_r \in V$ deux à deux orthogonaux.
Alors $$\|v_1+\dots+v_r\|^2 = \|v_1\|^2+\|v_2\|^2+\dots+\|v_r\|^2 .$$

Inégalité triangulaire
pour tous $v,w \in V$, $\|v+w\| \leq \|v\|+\|w\|$.

preuve : $$\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + 2\langle v,w\rangle + \|w\|^2$$
$$\underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|v\|^2 + 2\|v\|\,\|w\| + \|w\|^2$$
$$= (\|v\|+\|w\|)^2 .$$

(**Identité du parallélogramme** EXO?
pour tous $v,w\in V$, $$\|v+w\|^2+\|v-w\|^2 = 2\left(\|v\|^2+\|w\|^2\right).$$)

~~Isométries (V_1,φ_1), (V_2,φ_2) deux espaces pré-hilbertien~~
~~déf. $f:(V_1,\varphi_1)\to(V_2,\varphi_2)$ est une isométrie si~~
~~$d_1(f(v_1), f(w_1))=$~~

~~Isométrie de (V,φ) : $f:V\to V$ t.q.~~
~~$d(f(x),f(y)) = d(x,y)$ pour tous $x,y\in V$.~~
~~Ceci est équivalent à $\langle f(x),f(y)\rangle = \langle x,y\rangle$ pour tous $x,y\in V$.~~

Prop: Soit $V, \langle \cdot , \cdot \rangle$ un espace pré-hilbertien, $v_1, \dots, v_r \in V$ non nuls, deux à deux orthogonaux par $\langle \cdot , \cdot \rangle$.
Alors $\{v_1, \dots, v_r\}$ est une famille libre.

preuve: si $\sum_{j=1}^{r} \lambda_j v_j = 0$, on calcule pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$.

$$\langle v_k , \sum_{j=1}^{r} \lambda_j v_j \rangle = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \langle v_k , v_j \rangle = \lambda_k \underbrace{\|v_k\|^2}_{\neq 0} = 0$$

donc $\lambda_k = 0$.

Thm: Soit $(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien de dimension finie. Alors il existe une base orthonormée par $\langle \cdot , \cdot \rangle$. De plus, si $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormée, alors pour tout $x \in V$,

$$x = \sum_{j=1}^{n} \langle x , e_j \rangle e_j .$$

↓ conséquence de la réduction de Gauss et de la déf de produit scalaire.

rem: si la base n'est que orthogonale, on a plus généralement

$$x = \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle x , e_j \rangle}{\langle e_j , e_j \rangle} e_j .$$

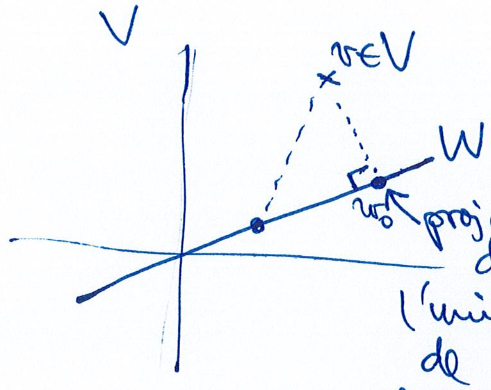
preuve: soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base ON

$$x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j .$$

alors pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\langle x , e_k \rangle = \langle \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j , e_k \rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle e_j , e_k \rangle = \lambda_k .$$

Projections orthogonales



proj orthogonale de v sur W = l'unique vecteur de W qui réalise le minimum de la distance $d(v,u)$, $u \in W$.

Lemme: Soit $w_0 \in W$ tel que
$$v - w_0 \in W^{\perp}.$$
Alors $d(v,w_0) \leq d(v,u)$ pour tout $u \in W$.

preuve:

$$d(v,u)^2 = \|v-u\|^2$$
$$= \|\underbrace{(v-w_0)}_{\in W^{\perp}} + \underbrace{(w_0-u)}_{\in W}\|^2$$
$$= \|v-w_0\|^2 + \|w_0-u\|^2$$
$$\geq \|v-w_0\|^2 = d(v,w_0)^2.$$

Question: un w_0 comme dans le lemme existe-t-il?
si oui, est-il unique? OUI.

soient $w_0, w_1 \in W$ t.q. $v-w_0, v-w_1 \in W^{\perp}$.
alors $w_0 - w_1 \in W^{\perp} \cap W$.
donc $\|w_0-w_1\|^2 = 0$
donc $w_0 = w_1$.

Pour montrer l'existence, il faut ~~supposer~~ une hypothèse de dimension finie ! on ne veut pas supposer V de dim finie (cf séries de Fourier !)

→ on suppose <u>W de dimension finie</u>.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base ON de W.

<u>Prop</u> :

$$w_0 \in \sum_{j=1}^{n} \langle v, e_j \rangle e_j$$

satisfait $v - w_0 \in W^\perp$.

fin du cours 3/3/2020 (preuve pas faite).

<u>preuve</u> : soit $w = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \in W$.

$$\langle v - \sum_{j=1}^{n} \langle v, e_j \rangle e_j , \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \rangle =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle v, e_k \rangle - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle v, e_j \rangle \langle e_j, e_k \rangle$$

$\delta_{jk} = 1$ si $j = k$, 0 si $j \neq k$

$$= \sum_k \lambda_k \langle v, e_k \rangle - \sum_k \lambda_k \langle v, e_k \rangle = 0.$$

Conclusion : $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ pré-hilbertien

<u>Thm</u> : ~~Si W est de dimension finie~~, pour tout $v \in V$ il existe un unique $w_0 \in W$ qui minimise $d(v, w)$ parmi tous les $w \in W$.

Ce w_0 s'appelle la <u>projection orthogonale</u> de v sur W.

De plus, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base ON de W, on a

$$\boxed{w_0 = \sum_{j=1}^{n} \langle v, e_j \rangle e_j}$$