UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER 2014-2015

Unité d'Enseignement MAT 231

Partiel du vendredi 7 novembre 2014

durée : 2h

Documents et calculatrices interdits

Sauf mention explicite du contraire, toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. La qualité de la rédaction sera un élément d'appréciation de la copie.

Autour du cours

1. Soit E un espace vectoriel, x_1, ..., x_n des éléments de E.

a. Montrer que la famille $(x_1, ..., x_n)$ est liée si et seulement si un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres vecteurs.

b. Dans le cas où la famille $(x_1, ..., x_n)$ est liée et la famille $(x_1, ..., x_{n-1})$ est libre, préciser le résultat précédent (justifier la réponse).

2. Soit E un espace vectoriel.

a. Si F, G sont deux sous-espaces vectoriels de E, donner (sans preuve) la définition et une caractérisation équivalente de l'affirmation $E = F \oplus G$.

b. Donner la définition du fait que $E = E_1 \oplus ... \oplus E_k$ pour k sous-espaces vectoriels $E_1, ..., E_k$ de E.

3. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$.

a. Définir le déterminant $\det(A)$.

b. Montrer que si on permute les colonnes de A par une permutation $\tau \in S_n$, alors on multiplie le déterminant par la signature de τ.

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E.
On considère la permutation $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)$ de S_4. On note T_σ l'endomorphisme de E défini par $T_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$, c'est-à-dire $T_\sigma(e_1) = e_2$, $T_\sigma(e_2) = e_1$, $T_\sigma(e_3) = e_4$, $T_\sigma(e_4) = e_3$. On note $f = \mathrm{id} - T_\sigma$.

1. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

2. Donner une base du noyau de f et une base de l'image de f.

3. Montrer que $\frac{1}{2}f$ est une projection de E sur $\mathrm{Im}\, f$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, f$.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, f un endomorphisme de E tel que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. On note r le rang de f.

1. Montrer que $r \leq \frac{n}{2}$.

2. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f s'écrit par bloc $\begin{pmatrix} O & A \\ O & O \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathbb{K}^{n-r,r}$ et O désigne des matrices nulles. Indication : on pourra prendre une base de $\operatorname{Ker} f$ et la compléter en une base de E.

3. Montrer qu'on peut améliorer le résultat précédent en obtenant une matrice pour f de la forme $\begin{pmatrix} O & A \\ O & O \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathbb{K}^{r,r}$.

Exercice 3

Soient $n \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in \mathbb{C}$. On considère le déterminant suivant :

$$d = \begin{vmatrix} 1 + x_1 y_1 & ... & 1 + x_1 y_n \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ 1 + x_n y_1 & ... & 1 + x_n y_n \end{vmatrix}$$

1. Calculer d lorsque $n = 1$ et $n = 2$. Montrer que dans le cas $n = 2$, on a $d = 0$ si et seulement si $x_1 = x_2$ ou $y_1 = y_2$.

2. Montrer que $d = 0$ si $n \geq 3$.

Exercice 4

Montrer que le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 8 & 14 & 3 \\ 6 & -6 & 9 \\ 6 & -4 & 3 \end{vmatrix}$$

est un nombre entier multiple de 36.