- Formule de Parseval - Bessel :

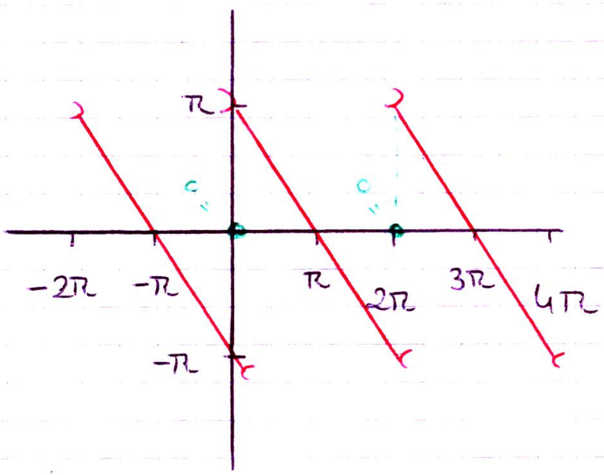
$f \in L^2(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{C})$

Coeff. de Fourier : $c_n \in \mathbb{C}$; $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ $\{n \geq 1\}$.

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2$$

- ex : $T = 2\pi$, $\omega = 1$.

$f(x) = \pi - x$ si $x \in]0, 2\pi[$, 0 si $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$



$f \in \mathcal{C}^\infty$ par morceaux avec sauts en $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

↳ $f(-x) = -f(x)$ impair

$a_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

$$= 2 \times \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \quad \text{car } f \text{ impair}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left[(\pi - x)\left(-\frac{\cos(nx)}{n}\right)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-1)\left(-\frac{\cos(nx)}{n}\right)dx\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{n} - \frac{1}{n}\underbrace{\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx}_{=0}\right)$$

$$= \frac{2}{n} \; ; \; n \geq 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n}\sin(nx) = f(x) = \begin{cases} \pi - x & x \in]0, 2\pi[\\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

↳ si $x = \frac{\pi}{2}$

n	1	2	3	4	5
$\sin(n\frac{\pi}{2})$	1	0	-1	0	1

$$\Rightarrow 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right) = \frac{\pi}{2}$$

↳ d'où la formule : $\boxed{\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \dots}$

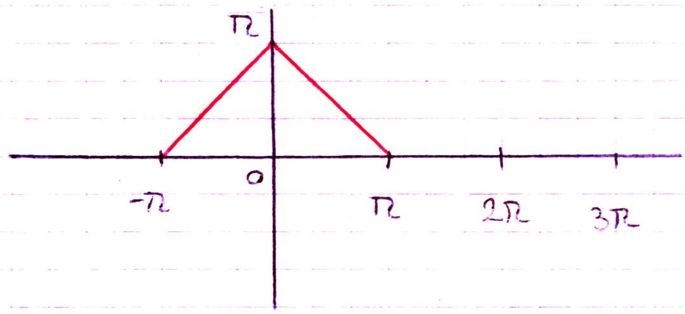
↳ Parseval - Bessel :

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|^2 = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$$

↳ d'où la formule d'Euler : $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$

- ex' : $f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{si } x \in [0, \pi] \\ \pi + x & \text{si } x \in [-\pi, 0] \end{cases}$ prolongée par periodicité de période 2π



↳ f paire $\Rightarrow b_n = 0$

$a_0 = \pi/2$ (valeur moyenne) ; pour $n \geq 1$, on a les a_n :

$$a_n = \underset{\text{paire}}{\frac{\overset{\times 2}{4}}{2\pi}}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\left[(\pi - x)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi}}_{0} - \int_0^{\pi} (-1)\frac{\sin(nx)}{n}\,dx\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} \quad \text{avec } \cos(n\pi) = (-1)^n \quad n \in \mathbb{N}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2}\right) \quad \text{et si } n \text{ pair, } a_n = 0$$

d'où $a_{2p+1} = \frac{4}{\pi}\frac{1}{(2p+1)^2}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx) = \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{a_0} + \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\cos((2p+1)x)}{(2p+1)^2} = f(x)$$

$\in \mathcal{C}^{\infty}_{morc}$ ✓

si $x = 0$ $\quad \overset{f(0)}{\pi} = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$

↳ d'où la Formule : $\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

somme [illegible]

$$S = 1 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} = 1 + \overbrace{\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots}^{\Sigma = \frac{1}{\text{impair}^2}}$$

$$+ \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}\Big) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$S = \Sigma + \frac{1}{4}S \Rightarrow \frac{3}{4}S = \Sigma \Rightarrow \Sigma = \frac{\pi^2}{8} \checkmark$$

- Parseval - Bessel.

$$a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{16}{\pi^2} \times \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \frac{\pi^2}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}}$$ somme des inverses impairs puissance 4

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{16}{15} \times \frac{\pi^4}{96} = \frac{\pi^4}{90}}$$ somme des inverses pairs puissance 4

* Démonstrations des théorèmes :

Soit $f \in \mathcal{C}^1_{morc}$

$$f_N(x) = \sum_{n=-N}^{+N} c_n \, e^{in\omega x} \qquad c_n \in \mathbb{C}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(y)\, e^{-in\omega y}\, dy$$

$$f_N(x) = \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(y) . \sum_{n=-N}^{+N} e^{-in\omega y} . e^{in\omega x}\, dy$$

$$= \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(y)\, D_N(x-y)\, dy$$

→ Noyau de Dirichlet :

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{+N} e^{in\omega x}$$

$$= e^{-iN\omega x} + \dots + 1 + e^{i\omega x} + \dots + e^{+iN\omega x}$$

$$= e^{-iN\omega x} \left(1 + e^{i\omega x} + \dots + e^{2iN\omega x} \right)$$

$$= e^{-iN\omega x} \left(\frac{e^{(2N+1) i\omega x} - 1}{e^{i\omega x} - 1} \right) \qquad 1 + x + \dots + x^p = \frac{x^{p+1} - 1}{x - 1}$$

$p = 2N$

$$= e^{iN\omega x} \left(\frac{\left(e^{i\left(\frac{2N+1}{2}\right)\omega x} - e^{-i\left(\frac{2N+1}{2}\right)\omega x} \right) e^{i\left(\frac{2N+1}{2}\right) i\omega x - iN\omega x}}{\left(e^{i\omega x/2} - e^{-i\omega x/2} \right) e^{i\omega x/2}} \right)$$

$$= \boxed{\frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\right)\omega x}{\sin\left(\frac{\omega x}{2}\right)} = D_N(x)}$$

fonction périodique de période T, paire, C^∞ sans discontinuité

↳ Valeur moyenne sur 1 période :

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} D_N(x)\, dx = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-N}^{+N} e^{in\omega x} = \underline{1}$$

pour $n=0$, 0 sinon

$$\rightarrow f_N(x) = \frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(y)\, D_N(x-y)\, dy$$

posons : $\left| \begin{array}{l} y = x - t \\ dy = -dt \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad x - y = t$

$$f_N(x) = \frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x-t)\, D_N(t)\, dt$$

$$= \boxed{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x-t)\, D_N(t)\, dt}$$

* Théorème de Dirichlet :

$f \in \mathcal{C}^1_{morc}$

$$\lim_{N\to+\infty} f_N(x) = \frac{1}{2}\left(f(x+0) + f(x-0)\right)$$

$\hookrightarrow D_N$ paire $\rightarrow D_N(t) = D_N(-t)$

$$\Rightarrow f_N(x) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{2}\left(f(x+t) + f(x-t)\right) D_N(t)\, dt$$

$$\hookrightarrow f_N(x) - \frac{1}{2}\left(f(x+0) + f(x-0)\right)$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{2}\left(f(x+t) + f(x-t) - \left(f(x+0) + f(x-0)\right)\right) D_N(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{2}\underbrace{\left[\frac{\left(f(x+t) - f(x+0)\right)}{t} + \frac{\left(f(x-t) - f(x-0)\right)}{t}\right]}_{F(t)} t\, D_N(t)\, dt$$

$$t\, D_N(t) = t\,\frac{\sin\left(N\omega t + \frac{\omega t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)} = \frac{t}{\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)}\left(\sin(N\omega t)\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) + \cos(N\omega t)\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right)$$

$\rightarrow$ Ceci implique :

$$f_N(x) - \frac{1}{2}\left(f(x+0) + f(x-0)\right) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \left(u(t)\sin(N\omega t) + v(t)\cos(N\omega t)\right) dt$$

avec $u(t) = F(t)\cdot\frac{t}{\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)}\cdot\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)$; $v(t) = F(t)\cdot t$

* Observation :

$$\begin{cases} \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x+t) - f(x+0)}{t} = \text{dérivée à droite de } f \text{ en } x \\ \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x-t) - f(x-0)}{-t} = \text{dérivée à gauche de } f \text{ en } x \end{cases}$$

et $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t}{\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)} \underset{\text{équivalent}}{\simeq} \dfrac{t}{\frac{\omega t}{2}} \longrightarrow \dfrac{2}{\omega}$

↳ On peut prolonger ces fonctions ✓

→ $u(t)$, $v(t)$ sont bien continues par morceaux, et périodiques de période T.

** Lemme de Riemann-Lebesgue :

$\forall f \in L^2(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{C})$

$$\lim_{n \to \pm\infty} \begin{vmatrix} c_n(f) \\ a_n(f) \\ b_n(f) \end{vmatrix} = 0$$

↳ D'après l'inégalité de Parseval-Bessel :

$$\sum |c_n(f)|^2 \leq \|f\|^2 \quad \text{série convergente}$$

si $S_n = u_0 + \dots + u_n \to S \Rightarrow u_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ ✓

Donc :

$f_N(x) - \frac{1}{2}(f(x+0) - f(x-0)) =$ somme de coeff de Fourier de $u(t)$ et $v(t)$

et $\xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$ (d'après le lemme de Riemann-Lebesgue).

donc $f_N(x) = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$ ✓ ∎

---

* Supposons $f \in \mathcal{C}^1$ sans discontinuité

$\Rightarrow f'$ continue périodique

→ Coeff. de Fourier :

$$\hat{f'}(n) = \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f'(x) e^{-in\omega x} dx$$

$$= \frac{1}{T} \Big(\underbrace{\big[f(x) e^{-in\omega x} \big]_{x_0}^{x_0+T}}_{= 0} + in\omega \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) e^{-in\omega x} dx \Big)$$

par périodicité : $f(x_0) = f(x_0+T)$, et f ss discontinuité

$$\boxed{\hat{f'}(n) = in\omega \hat{f}(n)}$$

$\Leftrightarrow \hat{f}(n) = \frac{1}{in\omega} \hat{f'}(n)$

↳ $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$,

d'où $\boxed{|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2 \omega^2} + |\hat{f'}(n)|^2 \right) ; n \neq 0}$ majoration

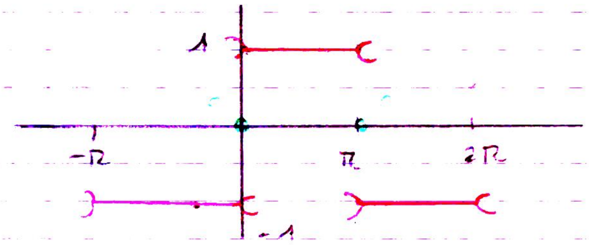
• Conséquence : si $f \in \mathcal{C}^1$ ss discontinuité, alors

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|$ est convergente

$\Rightarrow \sup | f_N(x) - f(x) | = \varepsilon_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$

convergence uniforme. ✓

→ Convergence des séries de Fourier pour les fonctions $\mathcal{C}^1$ sans discontinuités.



$**$ Soit le signal carré

$$f(x) = \begin{cases} 1 &]0,\pi[\\ -1 &]-\pi,0[\\ 0 & k\pi \end{cases}$$

période 2π.

→ f impair ; $a_n = 0$, et :

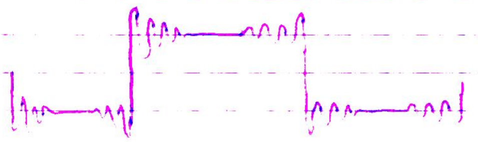
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\,\frac{1-(-1)^n}{n}$$

⇒ <u>Série de Fourier du signal carré :</u>

$$f_N(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \dots + \frac{\sin((2p+1)x)}{(2p+1)} + \dots\right)$$

"sinus impairs"

↳ Wilbraham (1848) :



ne colle pas au signal !

↳ Gibbs (1899) :

$$f_{2p+1}(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin(x) + \dots + \frac{\sin((2p+1)x)}{(2p+1)}\right)$$

$$f_N\left(\frac{a}{N}\right) = f_{2p+1}\left(\frac{a}{2p+1}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{p} \frac{\sin(2k+1)\left(\frac{a}{2p+1}\right)}{2k+1}$$

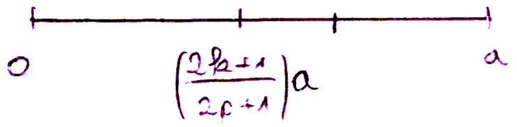
"zoom" d'un facteur N sur les harmoniques

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{p} \frac{\sin(2k+1)\left(\frac{a}{2p+1}\right)}{(2k+1)\left(\frac{a}{2p+1}\right)}\left(\frac{a}{2p+1}\right)$$

⇔ Somme de Riemann de :

$$g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

$$f_{2p+1}\left(\frac{a}{2p+1}\right) \xrightarrow[p \to +\infty]{} \frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$



→ fonction de Gibbs $G(a)$:

$$\boxed{G(a) = \frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{\sin(x)}{x}\,dx}$$

tend vers 1 pour $a \to +\infty$.