10/4/2012

Séries trigonométriques

~~série~~ série de la forme $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x}$ avec $c_n \in \mathbb{C}$

sommes partielles

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\omega x}$$

on ~~de~~ regarde si $S(x) = \lim_{N\to+\infty} S_N(x)$ existe

et si oui on dit que la série trigonométrique est CV

Dans ce cas on obtient une fonction $x \mapsto S(x)$

périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Modules $\left| c_n e^{in\omega x} \right| = |c_n|$

<u>théorème</u> si $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty$

(série absolument CV $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n| < +\infty$ et $\sum_{n=-1}^{-\infty} |c_n| < \infty$)

lors S est une fonction continue bornée périodique

$\forall x \in \mathbb{R}\ |S(x)| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|$

<u>dém</u> Soit $\varepsilon > 0$, erreur fixée

$$C = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{+N} |c_n| \Longrightarrow$$

$\exists N_0$ t.q. $C - \sum_{n=-N_0}^{N_0} |c_n| = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ |n|>N_0}} |c_n| < \varepsilon$

$$S(x) - S_{N_0}(x) = \lim_{N\to\infty} \left(S_N(x) - S_{N_0}(x)\right)$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \sum_{N_0 \leqslant |n| < N} c_n e^{in\omega x}$$

$$|S_N(x) - S_{N_0}(x)| \leqslant \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ N_0<|n|\leqslant N}} |c_n| \leqslant \varepsilon$$

$$|S(x) - S_{N_0}(x)| \leqslant \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Prenons $x_0 \in \mathbb{R}$ $x \mapsto S_{N_0}(x)$ continue

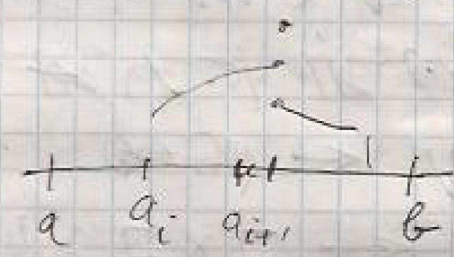
$\exists \delta > 0$ tq $|x - x_0| \leqslant \delta \Rightarrow |S_{N_0}(x) - S_{N_0}(x_0)| \leqslant \varepsilon$

$$|S(x) - S(x_0)| \leqslant |S(x) - S_{N_0}(x)| + |S_{N_0}(x) - S_{N_0}(x_0)| + |S_{N_0}(x_0) - S(x_0)|$$

$$\leqslant 3\varepsilon$$

Les fonctions continues ne suffisent pas
par exemple signaux carrés sur un oscilloscope

Définition On dira qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est de classe C^k par morceaux s'il existe une subdivision finie $a = a_0 < a_1 < \dots < a_N = b$ telle que $f_{|]a_i ; a_{i+1}[}$ se prolonge en une fonction C^k sur $[a_i , a_{i+1}]$ ($f, f', \dots, f^{(k)}$ existent et ont ~~continue~~ des limites à d^te et à g^che en a_i et a_{i+1})



Valeurs $f(a_j)$ non précisées pour l'instant

Valeur de demi saut $f(a_j) = \frac{1}{2}\left(\lim\limits_{\substack{x \to a_j^- \\ \text{g}}} f(x) + \lim\limits_{\substack{x \to x^+ \\ \text{d}}} f(x)\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(f(a_j - 0) + f(a_j + 0)\right)$$

spécialement pour le cas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ périodique et continue par morceaux

Notation $C^k_{\text{morceaux}}\left(\mathbb{R}/_{T\mathbb{Z}}, \mathbb{C}\right)$

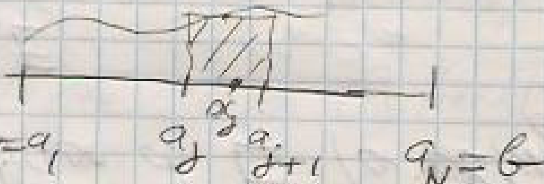
pour les fonctions C^k par morceaux périodiques de période T avec la condition

$f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x-0) + f(x+0)\right)$ aux points de discontinuité.

ces fonctions sont intégrables

<u>Def</u> des fonctions intégrables (au sens de Kurzweil 1955, Henstock 1957)

$f : [a, b] \to \mathbb{C}$



pas $h_j = (a_{j+1} - a_j)$

$x_j \in [a_j, a_{j+1}]$ aire alg. du rectangle $h_j f(x_j)$

Somme de Riemann $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}$
subdivision pointée

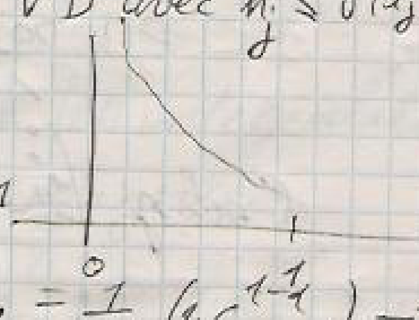
$$S_D(f) = \sum_{j=0}^{N-1} h_j f(x_j)$$

f est $\overset{K-H}{\text{intégrable}}$ d'intégrale $A = \int_a^b f(x)dx \in \mathbb{C}$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta : [a, b] \to \mathbb{R}_+, \forall D$ avec $h_j \leq \delta(x_j)$

$|A - S_D(f)| \leq \varepsilon$

Apparté $f(x) = x^{-\alpha}$ $\alpha > 0$



$$\int_c^1 x^{-\alpha} dx = \left[\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\right]_c^1 = \frac{1}{1-\alpha}(1 - c^{1-\alpha}) \underset{c \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{1-\alpha}$$

pas de soucis pour faire $c \to 0$ si $\alpha < 1$

Def $\tilde{L}^2([a,b],\mathbb{C})$ fontions $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ telles que f est HK-integrable et $|f|^2$ HK integrable

$\tilde{L}^2(\mathbb{R}/T\mathbb{Z},\mathbb{C})$ idem, fonctions periodiques de période T, et on intègre sur $[0,T]$ (ou $[x_0, x_0+T]$)

$$\|f\|^2 = \frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} |f(x)|^2\,dx$$

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} \overline{f(x)}\,g(x)\,dx$$

$\|f\|^2 \geqslant 0$

Vecteurs isotropes ?

$E\subset[a,b]$ $\qquad$ a $\quad$ E $\quad$ b $\qquad$ $\mathbb{1}_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x\in E \\ 0 & \text{si } x\notin E \end{cases}$

Def E négligeable si $\int_a^b \mathbb{1}_E(x)\,dx = 0$

(NDT (pourquoi $\mathbb{1}_E$ est HK integrable)

exemple E fini $\Rightarrow$ E négligeable

$E=K$ "ensemble de Cantor"

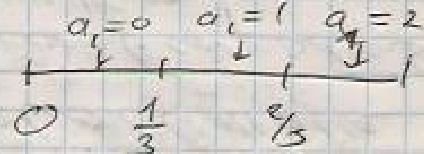
0 $\quad$ 1/3 $\quad$ 2/3 $\quad$ 1

on élimine le tiers central et on recommence dans chacun des intervalles restant etc

en n étapes la longueur restante est $(2/3)^n$

si $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n}$ $\quad a_n \in \{0, 1, 2\}$

$= 0, a_1 a_2$



$K = \left\{ \begin{array}{l} \text{des nombres triadique} \\ \text{sans chiffre } 1 \end{array} \right\}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n} \quad a_n \in \{0, 2\}$

Théorème les $f \in \tilde{L}^2([a,b], \mathbb{C})$ tq $\int_a^b |f(x)|^2 dx = 0$

sont les fonctions telles qu'il existe $E \subset [a,b]$ négligeable avec

$\begin{cases} f(x) \text{ quelconque si } x \in E \\ f(x) = 0 \end{cases}$

On convient d'identifier f_1, f_2 si elles diffèrent seulement sur un ensemble négligeable

$L^2([a,b], \mathbb{C})$ espace des fonctions identifiées comme ci-dessus

Vecteurs isotropes $\rightsquigarrow$ fonctions identifiées à 0

$L^2(\mathbb{R}/_{T\mathbb{Z}}, \mathbb{C})$ espace des fonctions L^2 périodiques de période T identifiées modulo les ensembles négligeables c'est un espace hermitien

$f \in L^2(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{C})$

$$c_n(f) = \langle e_n, f \rangle = \frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\, e^{-in\omega x}\, dx$$

$$a_0(f) = c_0(f) = \frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\, dx$$

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\cos(n\omega x)\, dx \qquad n \geq 1$$

$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\sin(n\omega x)\, dx$$

Observation pratique

- f paire $\Rightarrow b_n(f) = 0$
- f impaire $\Rightarrow a_n(f) = 0$

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(\omega n x)\, dx = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} (f(x) + f(-x))\cos(n\omega x)\, dx$$

$= 0$ si f impaire

$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(n\omega x)\, dx + \int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(x)\sin(n\omega x)\, dx$$

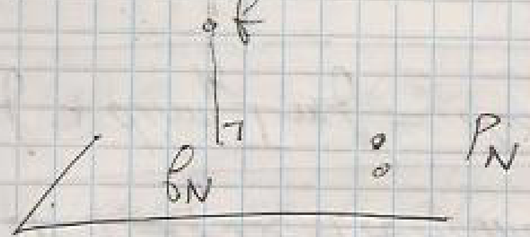
$x = -t \Leftrightarrow t = -x$

$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} (f(x) - f(-x))\sin(n\omega x)\, dx \qquad \int_{\frac{T}{2}}^{0} f(-t)(-\sin(\omega n t))(-dt)$$

$\underset{\text{si } f \text{ paire}}{=}$

$$= -\int_0^{\frac{T}{2}} f(-t)\sin(n\omega t)\, dt$$

$L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{C})$



$$f_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\, e^{in\omega x}$$ projection orthogonale

sur l'espace des polynômes trigonométiques de degré $\leq N$

Pythagore

$$\|f\|^2 = \|f_N\|^2 + \|f - f_N\|^2$$

$$(f = f_N + f - f_N \quad \text{et} \quad \langle f_N, f - f_N \rangle = 0)$$

Inégalité de Parseval - Bessel

$$\|f_N\|^2 = \sum_{n=-N}^{+N} |c_n(f)|^2 \leq \|f\|^2$$

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 \leq \|f\|^2}$$

Théorème (Parseval - Bessel)

$$\forall f \in \tilde{L}^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \|f\|^2$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{N\to+\infty} \|f - f_N\| = 0 \text{ c.a.d. } \lim_{N\to+\infty} f_N = f \text{ dans } L^2$$

Théorème (Carleson 1966) Si $f \in \tilde{L}^2(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{C})$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{ni\omega x} = f(x) \quad *$$

avec CV sauf peut-être sur un ensemble négligeable

Théorème (Dirichlet, 1829)

Si $f \in C^1_{\text{morceaux}}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ alors la série de Fourier converge en tout point vers $\frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0))$, donc vers $f(x)$ aux points de continuité.

Si f est C^1_{m} sans discontinuités $f \in C^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{C})$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - f_N(x)| = \varepsilon_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$$

$$\|f - f_N\|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(x) - f_N(x)|^2 dx \leq \varepsilon_N^2$$