Séries de Fourier.

I Polynômes trigonométriques et fonctions périodiques.

Définition : On appelle polynôme trigonométrique de degré N (de pulsation $\omega > 0$) :

$$f(x) = \sum_{n=-N}^{+N} c_n e^{in\omega x} , \quad c_n \in \mathbb{C}.$$

Euler : $e^{in\omega x} = \cos(n\omega x) + i \sin(n\omega x)$.

$$f(x) = a_0 + \sum_{-N}^{N} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x).$$

$a_0 = c_0$

$$\begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i c_n - i c_{-n} \end{cases} \qquad a_n , b_n \in \mathbb{C}.$$

$$\cos(\omega n x) = \frac{1}{2}\left(e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}\right)$$

$$\sin(\omega n x) = \frac{1}{2i}\left(e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}\right)$$

$c_0 = a_0$

$$\begin{cases} c_n = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{2i} b_n , \quad n \geq 1. \\ c_{-n} = \frac{1}{2} a_n - \frac{1}{2i} b_n . \end{cases}$$

Propriétés fondamentales

Fonctions périodiques de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$e^{in\omega(x+kT)} = e^{in\omega x + 2ink\pi} = e^{in\omega x} \qquad (e^{2i\pi} = 1)$$

f polynôme trigonométrique. $\Rightarrow f(x+kT) = f(x) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

<u>Notation</u> : $\mathcal{C}^p(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ = fonction de classe C^p

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui vérifient $f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

C^p $f, f', \dots f^{(p)}$ existent et sont continues

C^0 signifie continue.

Structure hermitienne fondamentale

$f, g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{C})$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \overline{f(x)}\, g(x)\, dx = \frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx.$$

en particulier, $\langle f, g \rangle = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx.$

Propriété : c'est un produit scalaire hermitien.

$$\|f\|^2 = \frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} |f(x)|^2\, dx$$

"norme L^2"

$\|f\|^2 \geqslant 0$ et $= 0$ ssi $f = 0$.

Théorème $\left(x \mapsto e^{in\omega x}\right)_{n \in \mathbb{Z}}$

Système orthonormé pour $\langle , \rangle$

$e_n(x) = e^{in\omega x}$

$$\langle e_n, e_p \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-in\omega x} e^{ip\omega x} \, dx .$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(p-n)\omega x} \, dx .$$

- si $p = n$ $\quad \langle e_n, e_n \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T 1 \, dx = 1.$
- si $p \neq n$ $\quad \langle e_n, e_p \rangle = \frac{1}{T} \left[\frac{1}{i(p-n)\omega} e^{i(p-n)\omega x} \right]_0^T = 0.$

car fonctions périodiques.

Corollaire les $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sont $\mathbb{C}$- linéairement indépendantes.

De façon générale, tout système orthonormé $(e_i)_{i \in I}$ dans un espace euclidien ou hermitien est libre sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$$\sum_{\text{finie}} \lambda_i e_i = 0.$$

$$\Rightarrow \lambda_j = \langle e_j, \sum \lambda_i e_i \rangle = 0.$$

$\mathcal{P}_N$ = $\mathbb{C}$ - espace vectoriel engendré par les $e_n(x) = e^{inwx}$

avec $-N \leq n \leq +N$.

$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{P}_N = 2N + 1$.

$(e_n)_{|n| \leq N}$ B.O. de $\mathcal{P}_n$.

$c_n(x) = \cos(nwx) \quad n \geq 0$.

$s_n(x) = \sin(nwx) \quad n \geq 0$.

$$\langle c_n, c_p \rangle = \langle \tfrac{1}{2}(e_n + e_{-n}), \tfrac{1}{2}(e_p + e_{-p}) \rangle = 0 \quad \text{si } n \neq p.$$

$$\langle c_n, c_n \rangle = \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\langle s_n, s_p \rangle = \langle \frac{1}{2i}(e_n - e_{-n}), \frac{1}{2i}(e_p - e_{-p}) \rangle$$

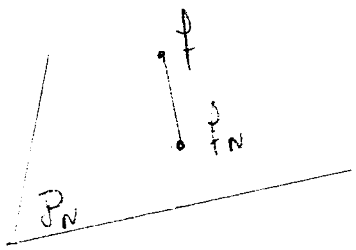
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq p \\ \frac{1}{2} & \text{si } n = p. \end{cases}$$

$$\langle c_n, s_p \rangle = 0 \quad \forall n, p.$$

Autre base $(e_0, c_1, s_1, \dots\dots c_N, s_N)$ de $\mathcal{P}_N$

Base orthogonale.

$\mathcal{C}^\circ(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{C}) = E$.



f étant donné, trouver $f_N \in \mathcal{P}_N$ qui approxime f le mieux possible.

$\Pi_N : E \longrightarrow \mathcal{P}_N \subset E$, projection orthogonale.

$$\Pi_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} \underbrace{\langle e_n, f \rangle}_{\substack{\text{composante} \\ \text{suivant } e_n.}} e_n$$

<u>Définition</u> : On appelle coefficient de Fourier :

$$c_n = \hat{f}(n) = \langle e_n, f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(x)\, e^{-nwx}\, dx.$$

$$= \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\, e^{-inwx}\, dx.$$

$$f_N = \Pi_N(f) : x \mapsto \sum_{n=-N}^{N} c_n\, e^{inwx}$$

Expression équivalente en cosinus et sinus.

$$a_0 = c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x)\, dx.$$

" valeur moyenne de f sur une période".

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(nwx)\, dx, \quad n \geq 1.$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(nwx)\, dx, \quad n \geq 1.$$

$$f_N = \Pi_N(f) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nwx) + b_n \sin(nwx).$$

$$\| x \longmapsto \cos(nwx) \| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \| x \longmapsto \sin(nwx) \|.$$

<u>Question</u> : A-t-on $f_N \longrightarrow f$. quand $N \longrightarrow +\infty$. ?

- Point de vue ponctuel, a-t-on $\forall x$, $f_N(x) \longmapsto f(x)$?
- Point de vue hermitien, a-t-on $\| f - f_N \| \longrightarrow 0$.

II) Notions sur les séries.

Série de nombres complexes.

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} U_n \quad \text{avec} \quad U_n \in \mathbb{C}.$$

Sommes partielles : $S_N = U_{n_0} + \dots + U_n + \dots + U_N$

Définition : On dit que la série converge (CV)
S_n tend vers une limite $S \in \mathbb{C}$ quand $N \to +\infty$
et alors, on écrit $S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} U_n$.
Sinon on dit que la série est divergente (DV)

Exemple :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a^n \qquad a \in \mathbb{C}$$

$$S_N = a^{n_0} + \dots + a^N = a^{n_0}\left(1 + a + a^2 + \dots + a^{N-n_0}\right)$$

$$S_N = a^{n_0} \frac{1 - a^{N-n_0+1}}{1 - a} \qquad \text{si } a \neq 1.$$

- si $a = 1$, $S_N = N - n_0 + 1 \longrightarrow +\infty$
- si $a \neq 1$

si $|a| < 1$ $\qquad S_N \longmapsto \dfrac{a^{n_0}}{1-a} = \sum_{n=n_0}^{+\infty} a^n$

si $|a| > 1$ $\qquad |a^{N-n_0+1}| \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $|S_N| \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

série DV

si $|a| = 1$, $a = e^{i\theta}$

a^{N-n_0+1}

$|S_N| \leqslant \dfrac{2}{|1-a|}$, somme partielle bornée mais série DV !

Séries $\sum U_n$ avec $U_n \in \mathbb{R}_+$.

$S_N = U_{n_0} + \cdots + U_N$. suite croissante.

2 cas : - (S_N) bornée, $\sum_{n=n_0}^{+\infty} U_n$ converge.

- (S_N) non bornée, $\sum_{n=n_0}^{+\infty} U_n = +\infty$.

<u>Principe de comparaison :</u>

$\sum_{n_0}^{+\infty} U_n$ $\sum_{n_0}^{+\infty} v_n$ $0 \leqslant U_n \leqslant v_n$.

si $\sum v_n$ converge alors $\sum U_n$ CV.

si $\sum U_n$ DV alors $\sum v_n$ DV.

<u>Exemple</u> : série de Riemann.

$S(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ $\alpha \in \mathbb{R}$.

si $\alpha \leqslant 0 \Rightarrow$ série DV.

si $\alpha < 1$, $S(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = +\infty$

si $\alpha > 1$, $\int_1^{+\infty} x^{-\alpha}\, dx = \dfrac{1}{\alpha - 1}$

si $\alpha = 1$, $\int_1^{n} \dfrac{1}{x}\, dx = \ln(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

Définition : On dit que la série $\sum_{n=n_0}^{+\infty} U_n$ est absolument CV si $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |U_n|$ est CV.

Exemple : $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ CV mais non absolument CV

Théorème $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |U_n|$ CV $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{+\infty} U_n$ CV.

dém : Pr U_n réel

$x \in \mathbb{R}$, $x = x_+ - x_-$ avec $x_+ = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

$x_- = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ |x| & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$

- $0 \leq (U_n)_+ \leq |U_n|$

  $\sum |U_n|$ CV $\Rightarrow \sum (U_n)_+$ CV.

- $0 \leq (U_n)_- \leq |U_n|$

  $\sum |U_n|$ CV $\Rightarrow \sum (U_n)_-$ CV.

$\sum U_n = \sum (U_n)_+ - \sum (U_n)_-$ CV