30/03/2012

Vecteurs propres des endomorphismes symétriques ou unitaires

$(E, <,>)$ espace euclidien ou hermitien $u \in \mathcal{L}_{K}(E,E)$

symétrique ($u^* = u$) ou unitaire ($u^* = u^{-1}$)

Si x est un vecteur propre $u(x) = \lambda x$

x' ——————— $u(x') = \lambda' x'$

avec $\lambda \neq \lambda'$ alors $x \perp x'$

$S = Ker(u - \lambda Id_E)$, $S' = Ker(u - \lambda' Id_E) \underset{\lambda \neq \lambda'}{\Rightarrow} S \perp S'$

Dém. • u symétrique ($\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$)

$<x, u(x')> = <u(x), x'>$

$<x, \lambda' x'> = <\lambda x, x'>$

$(\underbrace{\lambda' - \lambda}_{\neq 0}) <x, x'> = 0$ donc $<x, x'> = 0$

• u unitaire $|\lambda| = |\lambda'| = 1$

$<u(x), u(x')> = <x, x'>$

$<\lambda x, \lambda' x'> = <x, x'>$

$\bar{\lambda} \lambda' <x, x'> = <x, x'>$

$(\bar{\lambda} \lambda' - 1) <x, x'> = 0$

$\bar{\lambda} (\underbrace{\lambda' - \lambda}_{\neq 0}) <x, x'> = 0 \Rightarrow <x, x'> = 0$

Conséquence

$A = (a_{ik})$ $\det(A - \lambda I) = 0$ donne les v_p $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$S_j = \mathrm{Ker}(A - \lambda_j I)$

Ayant trouvé S_j on peut utiliser Gram Schmidt pour trouver une base orthonormée de S_j

On a $E = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$ orthogonale

Équation de la propagation de la chaleur

Fourier né en 1768 mort en 1830

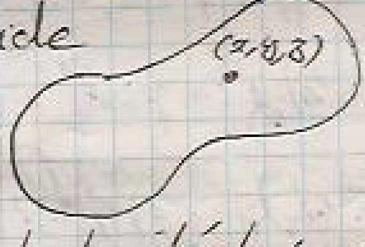
~~voir poly~~

École de Bénédictins à Auxerre

1798 Egypte

1801 Fourier quitte l'Egypte
1802 préfet de l'Isère
1807 mémoire sur la propagation de la chaleur
1811 Université de Grenoble
1816 Académie des Sciences

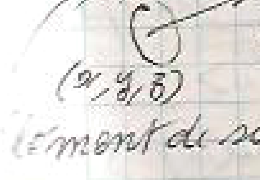
Solide



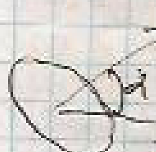
$\Theta(x,y,z,t)$ température au point (x,y,z) au temps t

Flux de densité de propagation de chaleur

(Fourier ignore la théorie atomique de Dalton)



$\vec{\Phi}(x,y,z,t)$ $\quad \Phi = \dfrac{dQ}{dS\,dt}$ ← quantité de chaleur qui traverse perpendiculairement l'élément de surface dS pendant le temps dt.



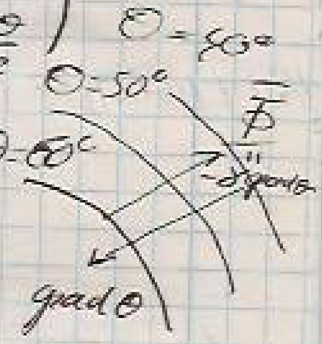
$\overrightarrow{dS}$ élément de surface multiplié par le vecteur normal $= dS\,\vec{n}$

$$dQ = \vec{\Phi}\cdot\overrightarrow{dS}\,dt = \Phi\,dS\cos\alpha\,dt$$

Φ unité $J\,m^{-2}\,s^{-1}$

Loi du flux $\vec{\Phi} = -\gamma\,\overrightarrow{grad}\,\theta = -\gamma\begin{pmatrix}\frac{\partial\theta}{\partial x}\\ \frac{\partial\theta}{\partial y}\\ \frac{\partial\theta}{\partial z}\end{pmatrix}$

explique que la chaleur se déplace des points chauds vers les points froids



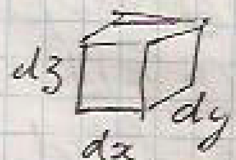
γ conductivité thermique

unités grad θ $\quad K\,m^{-1}$

$\gamma \quad J\,m^{-2}\,s^{-1} / K\,m^{-1} = J\,m^{-1}\,s^{-1}\,K^{-1}$

la chaleur provoque une élévation de température

Q chaleur emmagasinée par un petit élément de matière de masse dm (choix parallélépipède)



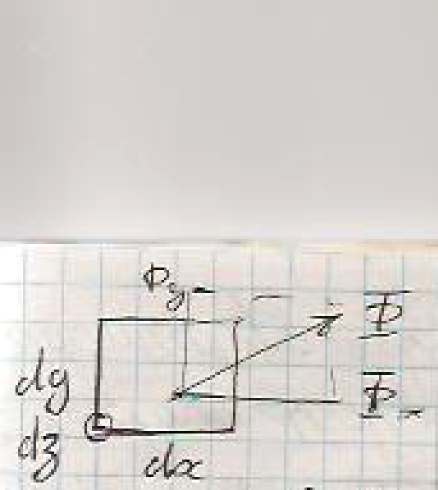
$dm = \rho\,dx\,dy\,dz$

ρ masse volumique (unité $kg\,m^{-3}$)

loi $\boxed{dQ = c\,dm\,d\theta}$

c capacité calorifique (l'eau en a une grande)

unité $J\,kg^{-1}\,K^{-1}$



$$\vec{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_x \\ \Phi_y \\ \Phi_z \end{pmatrix}$$

Quantité de chaleur qui entre dans le petit élément pendant dt

$$dQ = \left(\Phi_x(x,y,z) - \Phi_x(x+dx,y,z)\right) dy\, dz\, dt$$

$$+ \left(\Phi_y(x,y,z) - \Phi_y(x,y+dy,z)\right) dx\, dz\, dt$$

$$+ \left(\Phi_z(x,y,z) - \Phi_z(x,y,z+dz)\right) dx\, dy\, dt$$

x $\quad$ $x+dx$

faces x $\quad$ $x+dx$

$$\Phi_x(x+dx,y,z) - \Phi_x(x,y,z) = \frac{\partial \Phi_x}{\partial x}(x,y,z)\, dx$$

$$\boxed{dQ = -\left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz\, dt}$$

$$dQ = c\, dm\, d\theta = \rho c\, dx\, dy\, dz\, d\theta$$

$$\rho c\, d\theta = - \operatorname{div} \vec{\Phi}\, dt$$

$$\boxed{\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{1}{\rho c} \operatorname{div} \vec{\Phi}}$$

on revient à la première loi physique $\vec{\Phi} = -\gamma\, \overrightarrow{\text{grad}}\, \theta$

$$= -\gamma \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\gamma}{\rho c}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}\right)}$$

équation de la propagation de la chaleur

S'il y a production interne de chaleur $P = \frac{dQ'}{dx\,dy\,dz\,dt}$ $P(x,y,z,t)$

production volumique interne $(J\,m^{-3}\,s^{-1})$

On remplace (ds le calcul précédent) dQ par $dQ + dQ'$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\gamma}{\rho c}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}\right) + \frac{P}{\rho c}$$

barreau métallique de longueur L

On suppose que la température $\theta(x,t)$ ne dépend pas de y, z. (et que $P = 0$)

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \Rightarrow D = \frac{\gamma}{\rho c} > 0$$

Cherchons des solutions de la forme

$$\theta(x,t) = u(x)\,v(t) > 0$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = u(x)\,v'(t)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = u''(x)\,v(t)$$

$$u(x)\,v'(t) = D\,u''(x)\,v(t)$$

$$D\,\frac{u''(x)}{u(x)} = \frac{v'(t)}{v(t)}$$

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = -\lambda \qquad v(t) = v_0 e^{-\lambda t}$$

$\lambda > 0$ (sinon explosion exponentielle de température)

$$\frac{u''(x)}{u(x)} = -\omega^2 \qquad \boxed{D\omega^2 = \lambda}$$

$$u''(x) + \omega^2 u(x) = 0 \qquad u(x) = a\cos\omega x + b\sin\omega x$$

On a déjà des solutions de la forme

$$\theta(x,t) = e^{-\lambda t}\left(a\cos\omega x + b\sin\omega x\right)$$

avec $D\omega^2 = \lambda$

On a $\Phi(x,t) = 0$ si $x = 0$ ou $x = L$

$\Phi = 0 \iff \frac{\partial}{\partial x} = 0$ si $x = 0$ ou $x = L$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = e^{-\lambda t}\left(-a\omega\sin\omega x + b\omega\cos\omega(x)\right)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}(0,t) = b\omega e^{-\lambda t} = 0 \text{ ; donc } \theta(x,t) = e^{-\lambda t} a\cos\omega t$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}(L,t) = e^{-\lambda t}\left(-\omega a\sin\omega L\right)$$

condition $\omega = 0$ ou $\sin(\omega L) = 0$

$\omega L = n\pi \quad n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\omega = \frac{n\pi}{L}} \quad n \in \mathbb{N} \quad \boxed{\lambda = D\frac{n^2\pi^2}{L^2}} \quad \left(\text{ici } D = \frac{\gamma}{\rho c}\right)$$

"diffusivité thermique"

Solution $\theta(x,t) = \exp\left(-\frac{Dn^2\pi^2}{L^2}t\right) a \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ $n \in \mathbb{N}$

$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$ équation linéaire

$\theta_1\ \theta_2$ solutions $\Rightarrow \lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2$ solution

$$\theta(x,t) = \sum_{n=0}^{N} a_n \exp\left(-\frac{Dn^2\pi^2}{L^2}t\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \text{ solution}$$

$$\theta(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \exp\left(-\frac{Dn^2\pi^2}{L^2}t\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

si elle converge devrait être une solution.

Séries de Fourier

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x$$

(on a fixé le temps)

$t=0$ $\theta(x,0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ est ce que ceci peut représenter une distribution de température $\theta_0(x)$ $x \in [0,L]$ quelconque