Cours Mat 244
feuille 14

Théorème spectral (cas antisymétrique réel)

$f \in End_{\mathbb{R}}(E)$ antisymétrique sur E ev euclidien de dim n. Alors $\exists (b_1, \dots, b_n)$ base orthonormée dans laquelle

$$Mat_{(b_1,\dots,b_n)}(f) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & +\alpha_1 \\ -\alpha_1 & 0 \end{matrix}} & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & +\alpha_s \\ -\alpha_s & 0 \end{matrix}} & \\ 0 & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

On a ici des valp complexes.
$\lambda_j = i\alpha_j$ et $\lambda_j = -i\alpha_j$
pour chaque bloc 2×2.

Démo : $(e_1, \dots, e_n)$ BO $A = Mat_{(e_1,\dots,e_n)}(f)$ $A^t = -A \Leftrightarrow A^* = -A$
valeurs propres $\lambda_j \in i\mathbb{R}$. Seule valp réelle possible : 0.
Si $\lambda = i\alpha$ vp avec $\alpha \in \mathbb{R}$ $\longrightarrow V = X + iY$ vecteur propre colonne complexe.
$AV = \lambda V$ $A(X+iY) = i\alpha(X+iY)$ $\begin{cases} AX = -\alpha Y \\ AY = \alpha X \end{cases}$

Ceci donne un plan P engendré par X, Y. (X, Y ne peuvent être colinéaires).
Gram-Schmidt $\rightsquigarrow$ base orthonormée (b_1, b_2) de P $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$
$E = P \oplus P^\perp$ $P, P^\perp$ stables par f.
on finit par récurrence en raisonnement sur $f_{|P^\perp}$.

Coniques et quadriques

CONIQUES

Soit E un plan euclidien muni de (e_1, e_2) orthonormé. Notons (x, y) coordonnées.
Définition : on appelle conique C une courbe définie par un polynôme du second degré. $P(x,y) = \underbrace{ax^2 + bxy + cy^2}_{q(x,y)} + \underbrace{dx + ey}_{\ell(x,y)} + f$
$= q(x,y) + \ell(x,y) + f$
On augmente la dimension en se plaçant dans $E \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^3$
$Q(x,y,z) = ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2$ "polynôme homogénéisé". $P(x,y) = Q(x,y,1)$
Si Q est non dégénérée. signature $(3,0)$ $Q > 0$ Isotrope $(Q) = \{0\}$
signature $(0,3)$ $Q < 0$ " "
signature $(2,1)$ $Q(x,y,z) = \lambda\tilde{x}^2 + \mu\tilde{y}^2 + \nu\tilde{z}^2$ $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$ dans base orthonormée.
$\lambda, \mu > 0$ $\nu < 0$

Classification des coniques planes.

$\underbrace{ax^2 + bxy + cy^2}_{q(x,y) \text{ quadra}} + \underbrace{dx + ey}_{f(x,y) \text{ lin}} + \underbrace{f}_{\text{cste}} = 0$

Diagonalisation de $q(x,y)$. $\exists (\tilde{x}, \tilde{y})$ dans une base orthonormée telles que
$q(x,y) = \alpha\tilde{x}^2 + \beta\tilde{y}^2$ $Mat(\varphi) = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} = A$
$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a-\lambda & b/2 \\ b/2 & c-\lambda \end{pmatrix}$, ... ect

Cours Mat 244
feuille 14

Méthode plus simple dans le cas de dim 2. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$

P matrice de passage vers la nouvelle base.

$x = u\tilde{x} - v\tilde{y}$ et $y = v\tilde{x} + u\tilde{y}$

$q(x,y) = a(u\tilde{x} - v\tilde{y})^2 + b(u\tilde{x} - v\tilde{y})(v\tilde{x} + u\tilde{y}) + c(v\tilde{x} + u\tilde{y})^2$

$= (au^2 + buv + cv^2)\tilde{x}^2 + (-2auv + bu^2 - bv^2 + 2cuv)\tilde{x}\tilde{y} + (av^2 - 2buv + cu^2)\tilde{y}^2$

Pour diagonaliser, le coeff de $\tilde{x}\tilde{y}$ doit être nul.

$2(c-a)uv + b(u^2 - v^2) = 0$

on donne $u = \cos\theta$ et $v = \sin\theta$ d'où $(c-a)\sin 2\theta + b\cos 2\theta = 0$

$\tan 2\theta = -b/(c-a)$ si $c \neq a$.

$P(x,y) = \alpha\tilde{x}^2 + \beta\tilde{y}^2 + \gamma\tilde{x} + \delta\tilde{y} + \varepsilon$

cas <u>q non dégénéré</u> : $\det(q) = \alpha\beta = ac - b^2/4 \neq 0$

on peut éliminer la partie linéaire d'où $\alpha(\tilde{x} + \gamma/(2\alpha))^2 + \beta(\tilde{y} + \delta/2\beta)^2 = c$

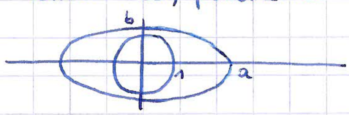
$\tilde{x}_0 = -\gamma/2\alpha$ $\tilde{y}_0 = -\delta/2\beta$ centre de la conique : ω

si $c \neq 0$ · $(\alpha/c)(\tilde{x} - \tilde{x}_0)^2 + (\beta/c)(\tilde{y} - \tilde{y}_0)^2 = 1$

Dans le repère $(\omega, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ (X,Y) coordonnées $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix}$

- $\frac{\alpha}{c}, \frac{\beta}{c} > 0$ $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ $a = \sqrt{\frac{c}{\alpha}}$, $b = \sqrt{\frac{c}{\beta}}$

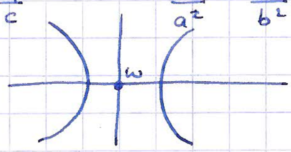
Ellipse de centre ω, paramétrée par : $\begin{cases} X = a\cos\theta \\ Y = b\sin\theta \end{cases}$



demi-axes a et b.

- α/c et $\beta/c < 0$ $\longrightarrow \varnothing$ pas de solution, conique vide.
- $\frac{\alpha}{c} > 0$ $\frac{\beta}{c} < 0$ $a = \sqrt{\frac{\alpha}{c}}$, $b = \sqrt{\frac{-\beta}{c}}$ $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$

$Y = \pm b\sqrt{X^2/a^2 - 1}$ $|X| \geq a$



$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = \left(\frac{X}{a} + \frac{Y}{b}\right)\left(\frac{X}{a} - \frac{Y}{b}\right) = X'Y'$

$X'Y' = 1$ $Y' = 1/X'$ hyperboles d'asymptotes $\omega X'$, $\omega Y'$

$\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} = 0$, $\frac{X}{a} - \frac{Y}{b} = 0$

Pour remettre sous forme "x" utiliser $X = \tilde{x} - \tilde{x}_0$ et $Y = \tilde{y} - \tilde{y}_0$.

<u>Cas où q est dégénéré.</u>

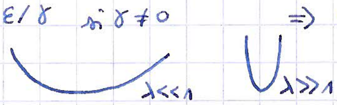
rang$(q) = 0$ $\Leftrightarrow q(x,y) = 0$ $dx + ey + f = 0$ droite si $(d,e) \neq (0,0)$

rang$(q) = 1$ $\alpha\tilde{x}^2 + \beta\tilde{x} + \gamma\tilde{y} + \delta = 0$

$\Rightarrow \alpha(\tilde{x} + \beta/2\alpha)^2 + \gamma\tilde{y} + \varepsilon = 0$

$X = \tilde{x} + \beta/2\alpha$ $Y = \tilde{y} + \varepsilon/\gamma$ si $\gamma \neq 0$ $\Rightarrow \alpha X^2 + \gamma Y = 0$ $\Rightarrow Y = -(\alpha/\gamma)X^2$

parabole $Y = \lambda X^2$



<u>Cas dégénérés</u> : • Ellipses / hyperboles avec constante 0

$\alpha X^2 + \beta Y^2 = 0$ $\alpha, \beta > 0$ ellipse réduite à son centre

$\alpha X^2 - \beta Y^2 = 0$ $\alpha, \beta > 0$

hyperbole dégénérée en 2 droites sécantes.

- Parabole dégénérée $(\gamma = 0)$

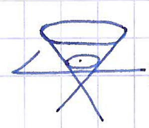
$\alpha X^2 + \varepsilon = 0$ $X^2 = -\varepsilon/\alpha$, $\alpha \neq 0$

deux droites parallèles éventuellement confondues.

<u>Réinterprétation comme sections coniques.</u>

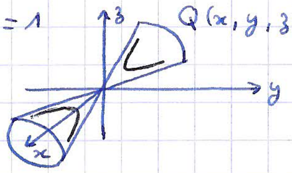
ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $Q(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2$

$z = \pm\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$

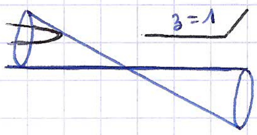


Cours Mat 244
feuille 15

hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



$Q(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z^2$ $\qquad x = \pm a\sqrt{\frac{y^2}{b^2} + z^2}$

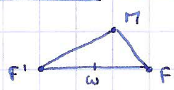


parabole $y = \lambda x^2,\ \lambda > 0$

$Q(x,y,z) = \lambda x^2 - yz = \lambda x^2 - \frac{1}{4}\left((y+z)^2 - (y-z)^2\right)$

$D = \{x = 0 = z,\ y \in \mathbb{R}\}$ $\qquad D \subset$ Isotrope (Q)

Construction des coniques à partir des foyers.



$F = (c,0)$ et $F' = (-c,0)$

$c = \frac{1}{2} d(F,F') = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{FF'}\|$ $\qquad \mathcal{E} = \{M \in \text{plan} / MF + MF' = 2d\}$

d = longueur fixée = (péri corde − FF')

$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = d$

$\Rightarrow (x+c)^2 + y^2 = \left(2d - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = 4d^2 - 4d\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$

$\Rightarrow 4xc - 4d^2 = -4d\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ $\qquad \Rightarrow (xc - d^2)^2 = d^2\left((x-c)^2 + y^2\right)$

$(d^2 - c^2)x^2 + d^2 y^2 = d^4 - d^2c^2 = d^2(d^2 - c^2)$

$\frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{d^2 - c^2} = 1$ $\qquad$ ellipse de demi-axes $a = d$ et $b = \sqrt{a^2 - c^2}$

Distance focale $\boxed{b^2 = a^2 - c^2}$ $\qquad c = \sqrt{a^2 - b^2}$ si $a > b$

Excentricité $e = c/a = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ $\qquad 0 \leq e < 1$

$e = 0$ foyers confondus $\qquad e \to 1$ ellipse de plus en plus aplatie.

$\mathcal{E} = \{M \in \text{plan} / |MF - MF'| = 2d\}$ $\qquad \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2d$

$(x-c)^2 + y^2 = \left(\pm 2d + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = 4d^2 \pm 4d\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$

$\Rightarrow 4xc + 4d^2 = \pm 4d\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ $\qquad \Rightarrow (xc + d^2)^2 = d^2\left((x+c)^2 + y^2\right)$

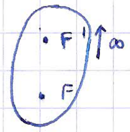
Inégalité triangulaire $FF' > |MF - MF'| \iff c > d$

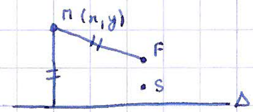
$(c^2 - d^2)x^2 - d^2y^2 = d^2c^2 - d^4 = d^2(c^2 - d^2)$ $\qquad \frac{x^2}{d^2} - \frac{y^2}{c^2d^2} = 1$

hyperbole de demi-axes $a = d$

$b = \sqrt{c^2 - d^2} = \sqrt{c^2 - a^2}$ $\qquad c = \sqrt{a^2 + b^2}$

excentricité $e = c/a = \sqrt{a^2 + b^2}/a > 1$





construction de la parabole par foyer et directrice

$2c = d(F, \Delta)$

$\mathcal{E} = \{M \in \text{plan} / d(M,F) = d(M,\Delta)\}$

S = origine des coordonnées $\qquad F = (0,c)$ $\qquad \Delta = \{y = -c\}$ $\qquad d(M,F) = \sqrt{x^2 + (y-c)^2}$

$d(M,\Delta) = y + c$ $\qquad y + c = \sqrt{x^2 + (y-c)^2}$

$\Rightarrow (y+c)^2 = x^2 + (y-c)^2$ $\qquad \Rightarrow 4yc = x^2$ $\qquad \Rightarrow y = \frac{1}{4c}x^2$ parabole de sommet $S = (0,0)$

$\lambda = 1/4c$ $\qquad c = 1/4\lambda$ $\qquad y = \lambda x^2 \rightsquigarrow$ foyer $(0, 1/4\lambda)$

on convient que l'excentricité de la parabole est $e = 1$.

Equation polaire d'une conique d'excentricité e de foyer O. $\qquad r = r_0/(1 - e\cos(\theta - \theta_0))$

Quadriques.

Surfaces dans $E \simeq \mathbb{R}^3$ définies par un polynôme.

$P(x,y,z)$ de degré ≤ 2. $\qquad E \times \mathbb{R}$ $\qquad (x,y,z,t)$

$Q(x,y,z,t)$ polynôme homogénéisé.

$P(x,y,z) = \underbrace{q(x,y,z)}_{\text{quadratique}} + \underbrace{l(x,y,z)}_{\text{linéaire}} + \underset{\text{cste}}{c_0}$