Dem de (2) On applique (1) à u^*

$\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, u^{**} = (\mathrm{Im}(u^*))^\perp$

$(\mathrm{Ker}\, u)^\perp = (\mathrm{Im}\, u^*)^{\perp\perp} = \mathrm{Im}\, u^*$

08/03/2012

<u>Théorème spectral</u> (Cas symétrique, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire euclidien $\langle x, y \rangle$

Alors tout endomorphisme symétrique $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E)$ admet une base orthonormée de vecteurs propres correspondant à des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ réelles

<u>Autre formulation</u> Partant d'une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E $\exists$ $(b_1, \dots, b_n)$ orthonormée dans laquelle

$$\mathrm{Mat}_{(b_1, \dots, b_n)}(f) = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ou Partant de $A = \mathrm{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(f)$, $\exists$ matrice de passage P orthogonale ($P^* = P^t = P^{-1}$) telle que $P^{-1} A P = D$

<u>Dém</u> $A = \mathrm{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(f)$ matrice $n \times n$ réelle

f symétrique $\Leftrightarrow A^t = A \Leftrightarrow A^* = A$

A considérée comme matrice hermitienne $\Rightarrow$ vp $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ réelles,

$AV = \lambda_i V$ solutions réelles $\rightsquigarrow$ vecteurs propres réelles, même raisonnement par récurrence sur la dimension que dans le cas complexe.

Conséquence $(E, <,>)$ espace euclidien de dim finie
$\varphi(x,y) = <x,y>$. Supposons E muni d'une autre forme bilinéaire symétrique $\Psi(x,y)$

Prenons $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée pour φ

$$\varphi(x,y) = X^t Y$$

dans la même base $\Psi(x,y) = X^t A Y$, A symétrique

Soit $f \in End_{\mathbb{R}}(E)$ de matrice $A = Mat_{(e_1,\dots,e_n)}(f)$

$$\Psi(x,y) = X^t(AY) = <x, f(y)> = \varphi(x, f(y))$$

le théorème spectral $\Rightarrow$ en calculant les vecteurs propres de A on obtient une base orthonormée $(b_1, \dots, b_n)$ de vecteurs propres tels que $f(b_j) = \lambda_j b_j$

$$\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i \cdot \tilde{y}_i$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i \cdot b_i$$ $\tilde{x}_i$ nouvelles coordonnées

$$\Psi(x,y) = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij} x_i y_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{x}_i \cdot \tilde{y}_i$$

$$q_\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i^2$$

$$q_\Psi(x) = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{x}_i^2$$

C'est une alternative à la méthode de Gauss pour trouver des bases orthogonales.

ce n'est pas nécessairement plus simple par exemple sur $\mathbb{Q}$ Gauss donne toujours des sol^{n} rationnelles mais pb pour trouver les racines d'un polynôme de degré ≥ 5 (le polynôme caractéristique)

Reformulation Etant donné deux formes bilinéaires symétriques φ, ψ sur un e.v. de dim finie dont l'une au moins est définie positive il existe une base qui est simultanément orthogonale pour φ et ψ

Théorème spectral (cas des endomorphismes orthogonaux)

Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien de dim. finie et $f \in End_{\mathbb{R}}(E)$ un endomorphisme orthogonal alors il existe $(b_1, \dots, b_n)$ orthonormée dans laquelle

$$\operatorname{Mat}_{(b_1,\dots,b_n)}(f) = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & 0 \\ & \begin{matrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j \end{matrix} & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & -1 & \\ 0 & & & & & & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} \ s \text{ blocs de rotation} \\ \} \ t \\ \} \ u \end{matrix}$$

dimension totale $2s + t + u$

$$\det(f) = (-1)^{u}$$

<u>Dém</u> Par récurrence sur $n = \dim E$

- $n=1$ (± 1) évident
- ~~Supposons le résultat démontré~~
- $n=2$ A matrice 2×2 orthogonale

$$A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$(-b, a)$

(a,b) $a^2+b^2=1$

$(b,-a)$

comme $n=2$ 2 choix pour compléter en une base orthonormée

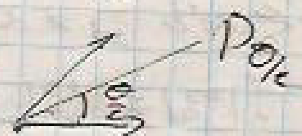
$$① \; A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ ou } ② \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = 1$$

$\exists \theta$ tq $a = \cos\theta$ cas ① $\det A = 1$ rotation d'angle θ

$b = \sin\theta$ cas ② $\det A = -1$

cas ② $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ symétrie orthogonale par rapport à la droite d'angle polaire $\theta/2$

$$P = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & -\sin\theta/2 \\ \sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix}$$



$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Supposons le résultat montré en dimension $\leq n-1$

<u>Rappel</u> si on trouve une v.p. complexe non réelle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ceci donne un plan $P \subset E$ stable par f

$E = P \oplus P^\perp$ ~~donc~~ $P, P^\perp$ sont stables par f

$f_{|P} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ dans la base (b_1, b_2)

récurrence pour $f_{|P^\perp}$ orthogonale dans $P^\perp$ $\dim P^\perp = n-2$
donc $P^\perp$ admet une base orthonormée $(b_3, \dots, b_n)$
comme voulu

Si on a une v.p $\lambda \in \mathbb{R}$, nécessairement $|\lambda| = 1$ (donc $\lambda = \pm 1$)
$\rightsquigarrow$ droite D stable $D = \mathbb{R} b_1$ $\|b_1\| = 1$

$E = \underset{(\pm 1)}{D} \oplus D^\perp$ $\quad f_{|D^\perp}$ orthogonale dans $D^\perp$, $\dim D^\perp = n-1$

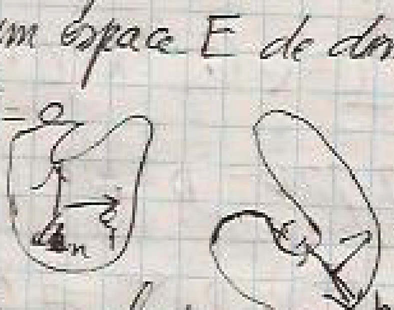
donc $D^\perp$ admet une base orthonormée $(b_2, \dots, b_n)$ comme voulu

<u>Def</u> Si f est une transformation orthogonale on dit que f est une rotation si $\det(f) = +1$

f est un anti déplacement si $\det(f) = -1$

explication du mot déplacement

Solide dans un espace E de dim n qui se déplace dans le temps $t = 0$



$(b_1(0), \dots, b_n(0)) = (e_1, \dots, e_n)$

$b_1(t)$ $P(t)$ la matrice de passage de $(e_1, \dots, e_n)$ à $(b_1(t), \dots, b_n(t))$

$b_n(t)$

déplacement d'un solide

$\Rightarrow P(t)$ est une matrice orthogonale

$t \mapsto \det P(t) = \pm 1$ mais en physique les mouvements sont continus donc $t \mapsto P(t)$ est une fonction continue valant I, et $+1$ en $t=0$ elle vaut tout le temp $+1$

Inversement

<u>Affirmation</u> Toute rotation ($f \in End_{\mathbb{R}}(E)$, $det(f)=+1$) est possible par déplacement continue dans le temp

$\rightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$ nombre de -1 est pair $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix}$

donc on peut prendre que des blocs rotation 2×2 et des 1

$$A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \sin\theta \end{vmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(t) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t\theta_j) & -\sin(t\theta_j) \\ \sin(t\theta_j) & \cos(t\theta_j) \end{pmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$P(0) = I \qquad P(1) = A.$

<u>Théorème spectral</u> (cas antisymétrique réel)

$f \in End_{\mathbb{R}}(E)$ antisymétrique sur E euclidien de dim n alors il existe une base orthonormée

$(b_1, \ldots, b_n)$ dans laquelle

$$\underset{(b_1,\ldots,b_n)}{\mathrm{Mat}}(f) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 \\ \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_s \\ \alpha_s & 0 \end{pmatrix} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

les v.p. $i\alpha_1, -i\alpha_1, \ldots, i\alpha_s, -i\alpha_s, 0, \ldots, 0$

on a des v.p. complexes $\lambda_j = i\alpha_j$ et $\overline{\lambda_j} = -i\alpha_j$ pour chaque bloc 2x2

<u>Dém</u> $(e_1, \ldots, e_n)$ B.O. $A = \underset{(e_1,\ldots,e_n)}{\mathrm{Mat}}(f)$

$A^t = -A \Leftrightarrow A^* = -A \Rightarrow$ v.p. purement imaginaires (ou 0)

seules v.p. réelles possibles : 0

Si $\lambda = i\alpha$ v.p. avec $\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha \neq 0$

$V = X + iY$ vecteur propre colonne complexe

$AV = \lambda V =$

$A(X+iY) = i\alpha(X+iY) = -\alpha Y + i\alpha X$

$$\begin{cases} AX = -\alpha Y \\ AY = \alpha X \end{cases}$$

ceci donne un plan P engendré par X, Y

(X, Y ne peuvent être colinéaires car $\alpha \neq 0$)

Gram Schmidt base orthonormée (b_1, b_2) de P

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$E = P \oplus P^\perp$; $P, P^\perp$ stables par f et $\dim P^\perp = \dim E - 2$

et on fini par recurrence pour $f_{|P^\perp}$.

Chap 6

Coniques et Quadriques

I Coniques

Soit E un plan euclidien muni d'une base (e_1, e_2) orthonormée.

Notons (x,y) les coordonnées

Def On appelle conique C une courbe définie par un polynôme du second degré $C = \{P(x,y) = 0\}$

$$P(x,y) = \underbrace{a x^2 + bxy + c y^2}_{} + \underbrace{dx + ey}_{} + f$$

$$= q(x,y) + l(x,y) + f$$

$\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^2$

On augmente la dimension en se plaçant dans $E \times \mathbb{R}$

$$Q(x,y,z) = a x^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2$$

"polynôme homogénéisé" $P(x,y) = Q(x,y,1)$

Si Q est non dégénérée

signature (3, 0) $Q>0$ Isotrope$(Q)=\{0\}$

signature (0, 3) $Q<0$ "

signature (2, 1)

signature (1, 2)

dans le cas (2, 1) $Q(x,y,z)=\lambda\tilde{x}^2+\mu\tilde{y}^2+\nu\tilde{z}^2$ $\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\mu&0\\0&0&\nu\end{pmatrix}$

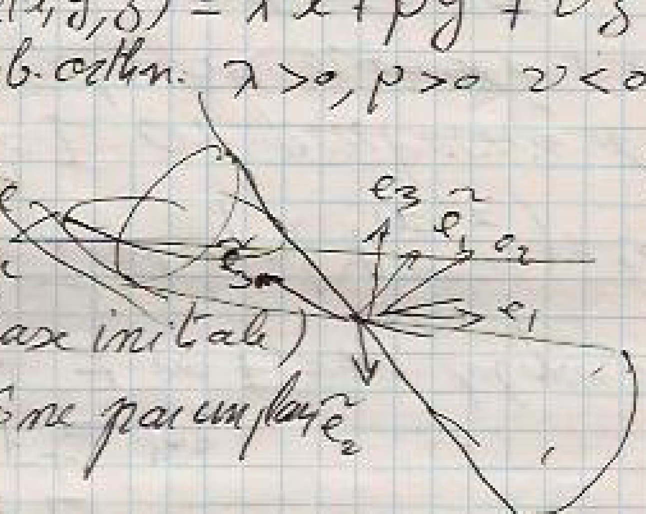
diagt de base ds une b. orthn. $\lambda>0,\ \mu>0\ \ \nu<0$

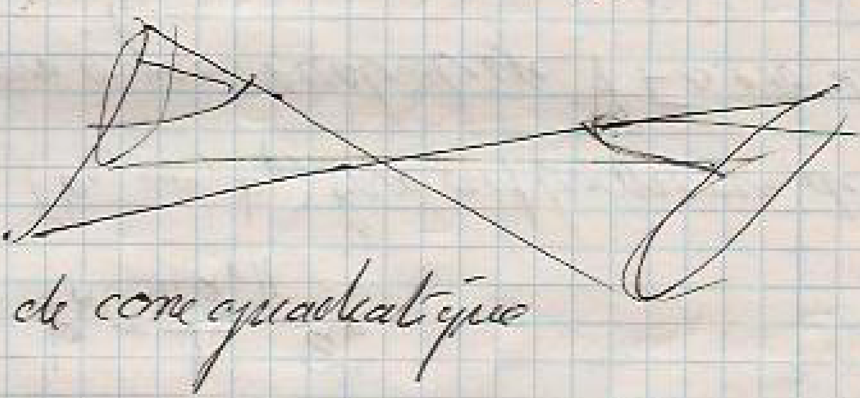
le cône isotrope $Q(x,y,z)=0$

on coupe par le plan

$z=1$ (dans la base initiale)

Section d'un cône par un plan





section plane de cone quadratique