$P^* C P = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$, diagonale à coefficient réels $a_j$.

<u>Calcul de P:</u>

méthode de Gauss $\rightsquigarrow \begin{cases} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_r \end{cases}$ où $r = \operatorname{rang}(\varphi) = \operatorname{rang}(C) \leq n$.

on complète en une base $(\ell_1, \dots \ell_n)$

$L = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix} \rightsquigarrow P = L^{-1}$.

<u>Théorème de Sylvester</u> Pour deux bases orthogonales $\mathcal{B}$ et $\tilde{\mathcal{B}}$, les nombres $\begin{cases} p_+ \text{ de signes positifs} \\ p_- \text{ de signes négatifs.} \end{cases}$ sont les mêmes

$(p_+, p_-)$ signature $\quad p_+ + p_- = r$.

Il existe toujours des bases orthogonales si $\varphi$ hermitienne.

<u>Définition</u> : $x \perp y \iff \varphi(x,y) = 0$.

(lorsque $\varphi$ est hermitienne $\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$)

F s.e.v sur $\mathbb{C}$, $F^\perp = \{y \in E \,/\, \forall x \in F,\ x \perp y,\ \varphi(x,y) = 0\}$

$\operatorname{Ker} \varphi = E^\perp = \{y \in E \,/\, CY = 0\}$ donné par Ker C.

$q(x) = \varphi(x,x) \in \mathbb{R}$ si $\varphi$ hermitienne.

$\text{Isotrope}(q) = \{x \in E,\ q(x) = 0\}$ $X^* C X = 0$

$\operatorname{Ker} \varphi \subset \text{Isotrope}(q)$.

Sur $\mathbb{C}^2$, $q(z_1, z_2) = |z_1|^2 - |z_2|^2$

$B = \{(1,0),(0,1)\}$ $\quad \mathrm{Mat}_B(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\} \subsetneq \mathrm{Isotrope}(q) = \{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2,\ |z_1| = |z_2|\}$

**Définition :** On dit que :

- $q$ est semi-positive si $\forall x \in E,\ q(x) \geqslant 0$.
- $q$ est définie positive si $\forall x \in E,\ x \neq 0 \Rightarrow q(x) > 0$

Si $q \geqslant 0$, on a une semi-norme

$$\|x\| = \sqrt{q(x)} = \sqrt{\varphi(x,x)}$$

Théorème : (inégalité de C-S, cas hermitien).

- Si $\varphi$ forme hermitienne avec $q \geqslant 0$ alors $\forall x,y \in E \quad |\varphi(x,y)| \leqslant \|x\|\|y\| = \sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)}$
- Si de plus $q$ définie $> 0$, on a égalité $|\varphi(x,y)| = \|x\|\|y\|$ $\Leftrightarrow$ $x,y$ $\mathbb{C}$ linéairement dépendants.

<u>dém</u> : $\varphi$ sesquilinéaire $\Rightarrow$ $\mathrm{Re}\,\varphi$ bilinéaire symétrique

$\lambda \in \mathbb{R}$
$$\mathrm{Re}(\varphi(\lambda x, y)) = \mathrm{Re}(\bar{\lambda}\,\varphi(x,y)) = \mathrm{Re}(\lambda\,\varphi(x,y)) = \lambda\,\mathrm{Re}(\varphi(x,y)).$$

$$q(x) = \varphi(x,x) \in \mathbb{R}. = \mathrm{Re}(\varphi(x,x))$$

C-S dans le cas de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ donne $|\mathrm{Re}\,\varphi(x,y)| \leqslant \|x\|\,\|y\|$

$B = \{(1,0),(0,1)\}$ $\quad \mathrm{Mat}_B(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\ker \varphi = \{0\} \subsetneq \mathrm{Isotrope}(q) = \{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2,\ |z_1| = |z_2|\}$

<u>Définition</u> : On dit que :

- $q$ est semi-positive si $\forall x \in E,\ q(x) \geqslant 0$.
- $q$ est définie positive si $\forall x \in E,\ x \neq 0 \Rightarrow q(x) > 0$

Si $q \geqslant 0$, on a une semi-norme

$$\|x\| = \sqrt{q(x)} = \sqrt{\varphi(x,x)}$$

Théorème : (inégalité de C-S, cas hermitien).

- Si $\varphi$ forme hermitienne avec $q \geqslant 0$ alors
$\forall x,y \in E \quad |\varphi(x,y)| \leqslant \|x\|\|y\| = \sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)}$

- Si de plus $q$ définie $> 0$, on a égalité $|\varphi(x,y)| = \|x\|\|y\|$
$\Leftrightarrow x,y$ $\mathbb{C}$ linéairement dépendants.

<u>dém</u> : $\varphi$ sesquilinéaire $\Rightarrow$ $\mathrm{Re}\,\varphi$ bilinéaire symétrique

$$\lambda \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{Re}(\varphi(\lambda x, y)) = \mathrm{Re}(\bar{\lambda}\varphi(x,y))$$
$$= \mathrm{Re}(\lambda \varphi(x,y))$$
$$= \lambda \mathrm{Re}(\varphi(x,y)).$$

$$q(x) = \varphi(x,x) \in \mathbb{R}.$$
$$= \mathrm{Re}(\varphi(x,x))$$

C-S dans le cas de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ donne $|\mathrm{Re}\,\varphi(x,y)| \leqslant \|x\|\,\|y\|$

$\varphi$ forme hermitienne définie positive.

$$C-S \Rightarrow \left| \int_a^b \overline{f(t)}\, g(t)\, dt \right| \leq \left( \int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \times \left( \int_a^b |g(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

avec égalité ssi $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ tq, $f = \lambda g$ <u>ou</u> $g = \lambda f$.

<u>Définition</u> : on appelle <u>espace hermitien</u>. un e.v $E$ sur $\mathbb{C}$ muni d'une forme hermitienne définie positive.
En dimension finie, on peut trouver des bases orthonormées sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

<u>Méthode de Gram - Schmitt :</u>

$F$, sev de $E$ muni d'une base $(a_1, \dots a_p)$ non orthonormée
$\rightsquigarrow (b_1, \dots b_p)$ orthonormée ?

$b_1 = \dfrac{1}{\|a_1\|} a_1$, on a bien $\|b_1\| = 1$.

$\tilde{a_j} = a_j + \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_{j-1} b_{j-1}$.

$\langle b_k, a_k \rangle = \langle b_k, a_j \rangle + \lambda_k = 0$ ?

$$\tilde{a_j} = a_j - \sum_{k=1}^{j-1} \langle b_k, a_j \rangle b_k \perp b_1, b_2, \dots, b_{j-1}$$

$b_j = \dfrac{1}{\|\tilde{a_j}\|} \tilde{a_j} \longleftarrow a_j = 0$ erreur !

Vect $(a_1, \dots a_j)$ = Vect $(b_1, \dots b_j)$ à chaque étape.

Formules essentielles :

$(b_1, \dots b_n)$ base orthonormée de $E$.

$x \in E$ s'écrit $x = \sum_{j=1}^{n} x_j b_j$

$x_j = \langle b_j, x \rangle$

$F$ s.e.v de $E$ dans $E = F \oplus F^\perp$

$\begin{cases} \pi_F & \text{projection } \perp \text{ sur } F. \\ \sigma_F & \text{sym } \perp \text{ p/r à } F. \end{cases}$

$$\pi_F(x) = \sum_{j=1}^{p} \langle b_j, x \rangle b_j$$

$$\sigma_F(x) = 2\pi_F(x) - x = 2 \sum_{j=1}^{p} \langle b_j, x \rangle b_j - x.$$

Endomorphismes symétriques, antisymétriques, orthogonaux $(\mathbb{R})$

hermitiens, antihermitiens, unitaires $(\mathbb{C})$

Commençons par le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Soit $E$ un e.v sur $\mathbb{C}$ de dimension finie $n$ muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$ (défini $> 0$).

Soit $(e_1, \dots e_n)$ base orthonormée.

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j y_j = X^* Y.$$

$$\mathrm{Mat}_{(e_j)} (\langle , \rangle) = (\langle e_j, e_k \rangle) = (\delta_{jk}) = I.$$

Soit $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E) = \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E, E)$.

$\mathrm{Mat}_{(e_j)}(u) = A$

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u(e_1) & & u(e_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ \\ e_n \end{array} \end{array}$$

Théorème : Il existe $u^* \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E,E)$ unique avec la propriété que

$\forall x, y \in E, \quad \langle x, u(y) \rangle = \langle u^*(x), y \rangle$

et de plus $\mathrm{Mat}_{(e_j)}\, u^* = A^* = (\mathrm{Mat}_{(e_j)}(u))^*$.

dém :

$\langle x, u(y) \rangle = X^*(AY) = (A^*X)^* Y = \langle u^*(x), y \rangle$.

unique choix possible.

Définitions : • $u^*$ est l'endomorphisme adjoint de $u$.

• $u$ est symétrique ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), hermitien ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) si $u^* = u$.

• $u$ est antisymétrique ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), antihermitien ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) si $u^* = -u$.

Si $M$ matrice réelle $M^* = \overline{M^t} = M^t$.

Observation : Si $F$ s.e.v de $E$ sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

$\pi_F$ projection $\perp$ et $\sigma_F$ symétrie $\perp$ sont des endomorphismes symétriques.

$E = F \oplus F^\perp$

$x = x' + x'' \qquad \pi_F(x) = x'$

$y = y' + y''$

$$\langle x, y\rangle = \langle x'+x'', y'+y''\rangle = \langle x', y'\rangle + \langle x'', y''\rangle$$

$$\langle x, \pi_F(y)\rangle = \langle x'+x'', y'\rangle = \langle x', y'\rangle.$$

$$\langle \pi_F(x), y\rangle = \langle x', y'+y''\rangle = \langle x', y'\rangle.$$

On a bien $\langle \pi_F(x), y\rangle = \langle x, \pi_F(y)\rangle = \langle \pi_F^*(x), y\rangle$

$\forall x, y \in E$ donc $\underline{\pi_F = \pi_F^*}$

$$\sigma_F = 2\pi_F - Id_E \Rightarrow \sigma_E^* = \sigma_F$$

car $Id_E^* = Id_E$ (évident).

Proposition : Soit $u \in End_{\mathbb{K}}(E)$.

$S$ s. e. stable pour $u$.

$\Leftrightarrow$ $S^\perp$ s. e. stable pour $u^*$

dém: Il suffit de démontrer $\Rightarrow$

$u(S) \subset S \Rightarrow u^*(S^\perp) \subset S^\perp$

Supposons $u(S) \subset S$

Prenons $x \in S^\perp$, question : $u^*(x) \in S^\perp$ ?

$\forall y \in S \quad \langle u^*(x), y\rangle = \langle \underbrace{x}_{\in S^\perp}, \underbrace{u(y)}_{\in S}\rangle = 0$ CQFD

Conséquence : Soit $E = F \oplus F'$ somme directe

$\pi_{F,F'} : E \longrightarrow E$ projection sur $F$ // $F'$

Formules : $\mathrm{Ker}(u^*) = (\mathrm{Im}(u))^\perp$

$\mathrm{Im}(u^*) = (\mathrm{Ker}\ u)^\perp$

dém : (1) $x \in E$ tq $u^*(x) = 0 \Leftrightarrow \forall y \in E, \langle u^*(x), y\rangle = 0.$

$\Leftrightarrow \forall y \in E, \langle x, u(y)\rangle = 0.$

$\Leftrightarrow x \perp \mathrm{Im}\ u.$

(2) J applique (1) à $u^*$

$\mathrm{Ker}\ u = \mathrm{Ker}\ u^{**} = (\mathrm{Im}(u^*))^\perp$

$(\mathrm{Ker}\ u)^\perp = (\mathrm{Im}\ u^*)^{\perp\perp} = \mathrm{Im}\ u^*$

Caractérisation des projections et des symétries :

$E = F \oplus F'$

$p = \pi_{F,F'}$ projection sur $F // F'$.

$p(p(x)) = p(x)$.

donc $\boxed{p \circ p = p}$ $\longrightarrow$ propriété d'impotence.

- Projections : Si $p \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,E)$ vérifie $p \circ p = p$ alors $p$ est la projection sur $F = \mathrm{Im}\ p$ parallèlement à $F' = \mathrm{Ker}\ p$.

dém : Prenons $x \in E$, $x = \underbrace{p(x)}_{\in F} + \underbrace{(x - p(x))}_{\in F'}$

$p(x - p(x)) = p(x) - p \circ p(x) = p(x) - p(x) = 0.$

donc $x - p(x) \in F' = \mathrm{Ker}\ p$.

$F \cap F'$ ? $x \in F = \mathrm{Im}\ p$ signifie $x = p(v)$, $v \in E$

$x \in F' = \mathrm{Ker}\, p$ signifie $p(x) = 0$.

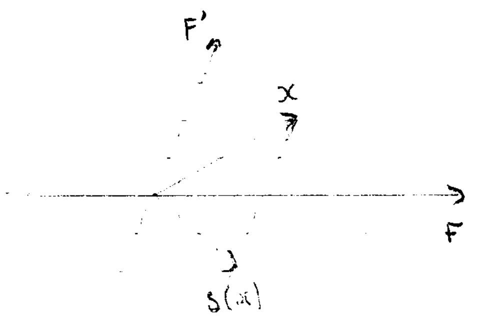
$p(x) = p(p(v)) = p(v) = x$.

donc $x = 0 \Rightarrow F \cap F' = \{0\}$.

Ceci montre bien que : $E = F \oplus F'$

$p(x) = \pi_{F,F'}(x)$

$x - p(x) = \pi_{F',F}(x)$.




$s = \sigma_{F,F'}$ symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $F'$

On a $\boxed{s \circ s = \mathrm{Id}_E}$

- Symétrie : Si $s \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,E)$ vérifie $s \circ s = \mathrm{Id}_E$, alors $s$ est la symétrie sur $F$ = " invariants " = $\{x \in E,\ s(x) = x\}$ parallèlem$^t$ à $F'$ = "anti-invariants" = $\{x \in E\ ;\ s(x) = -x\}$

$x + s(x) = 2\, p(x)$.

$p(x) = \frac{1}{2}(x + s(x))$.

dc $\boxed{p = \frac{1}{2}(\mathrm{Id}_E + s)}$

$p \circ p = \frac{1}{4}(\mathrm{Id}_E + 2s + s \circ s)$.

$p \circ p = p \Leftrightarrow \frac{1}{4}(\mathrm{Id}_E + \cancel{2}s + s \circ s) = \frac{1}{2}(\mathrm{Id}_E + \cancel{s})$

$\Leftrightarrow s \circ s = \mathrm{Id}_E$

Si $s \circ s = Id_E$, alors $p \circ p = p$ donc $p$ est une projection et $s = 2p - Id_E$ est la symétrie correspondante.

Supposons $E$ hermitien.

$E = F \oplus F'$ pas nécessairement orthogonales.

$p = \pi_{F,F'}$

$p^*$ ?

En général $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$

$p \circ p = p \Rightarrow p^* \circ p^* = p^*$

$p^*$ est encore une projection

$\operatorname{Ker} p^* = (\operatorname{Im} p)^\perp = F^\perp$

$\operatorname{Im} p^* = (\operatorname{Ker} p)^\perp = (F')^\perp$

$p^* = \pi_{(F')^\perp, F^\perp}$

$$(\pi_{F,F'})^* = \pi_{(F')^\perp, F^\perp}$$

Conséquences :

- On a $(\pi_{F,F'})^* = \pi_{F,F'} \iff F' = F^\perp$
- Une projection orthogonale est une application linéaire $p$ telle $p \circ p = p$ et $p^* = p$.

De même $(\sigma_{F,F'})^* = \sigma_{(F')^\perp, F^\perp}$

donc $(\sigma_{F,F'})^* = \sigma_{F,F'}$ ssi $F' = F^\perp$

- Une symétrie orthogonale est caractérisée par $s \circ s = Id_E$, $s^* = s$

Théorème et définition : $(\dim E < +\infty)$.

Soit $E$ espace hermitien et $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,E)$. Il y a équivalence entre :

(1) $u$ isométrique (préserve la norme).

$\forall x \in E, \quad \| u(x) \| = \| x \|$

(2) $u$ préserve le produit scalaire

$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

(3) $u$ inversible et $u^* \circ u = u \circ u^* = Id_E$.

(4) $\exists (b_1, \dots b_n)$ base orthonormée de $E$, tq $(u(b_1), \dots u(b_n))$ est encore orthonormée.

(4)' $\forall (b_1, \dots b_n)$ base orthonormée $(u(b_1), \dots u(b_n))$ orthonormée

On dit alors que :

$u$ est "unitaire" (cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

$u$ est "orthogonale" (cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

<u>dém</u> : (1) $\Rightarrow$ (2) $\to$ formule de polarisation.

(2) $\Rightarrow$ (1) $\to$ évident.

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left( \| x+y \|^2 - \| x-y \|^2 + i \| x-iy \|^2 - i \| x+iy \|^2 \right).$$

$$\langle u(x), u(y) \rangle = \frac{1}{4}\left( \| u(x+y) \|^2 - \| u(x-y) \|^2 + i \| u(x-iy) \|^2 - i \| u(x+iy) \|^2 \right)$$

(2) $\Rightarrow$ (3).

$\langle u(x), u(y) \rangle = \langle u^* \circ u(x), y \rangle$. ceci est égal à $\langle x, y \rangle$ pour tout $x, y$ ssi $u^* \circ u = Id_E$.

$\Leftrightarrow$ $u$ inversible et $\boxed{u^* = u^{-1}.}$

(2) $\Rightarrow$ (4)' $\quad \langle b_j, b_k \rangle = \delta_{jk}$

conclusion $\langle u(b_j), u(b_k) \rangle = \langle b_j, b_k \rangle = \delta_{jk}$

donc $\big(u(b_1), \dots u(b_n)\big)$ orthonormée.

(4)' $\Rightarrow$ (4) (existence de BO !).

(4) $\Rightarrow$ (1) $\quad x = \sum_{j=1}^{n} x_j b_j \qquad \|x\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2$

$$u(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \, u(b_j).$$

$$\| u(x) \|^2 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2$$

<u>Traduction matricielle</u> :

$u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, E)$ de matrice $A = \mathrm{Mat}_{(e_j)}(u)$. dans une base orthonormée $(e_j)$.

$u$ isométrie $\Leftrightarrow$ $A^* A = I$.

$$\begin{pmatrix} \overline{a_{1i}} & \dots & \overline{a_{ni}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} i$$

$$c_{ij} = \left\langle \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{K}^n}$$

où $\langle \, , \rangle_{\mathbb{K}^n}$ produit scalaire usuel de $\mathbb{K}^n$.

<u>Remarque</u> : $A^* A = I$ signifie que les colonnes de $A$ forment une base orthonormée.

Ceci équivaut à $AA^* = I$ qui signifie que les lignes forment une base orthonormée.

On dit que :

$A$ matrice orthogonale ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

$A$ matrice unitaire ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

Théorème spectral (cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E,E)$.

(1) $u^* = u$ (symétrique) $\Leftrightarrow$ $\exists (b_1, \dots b_n)$ base orthonormée de vecteurs propres de $u$ avec des valeurs propres réelles.

$$\mathrm{Mat}_{(b_j)}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\lambda_j \in \mathbb{R}$ valeurs propres.

(2) $u$ unitaire $\Leftrightarrow$ $\exists (b_1, \dots b_n)$. base orthonormée de vecteurs propres avec des valeurs propres $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $|\lambda_j| = 1$

$\lambda_j = e^{i\theta_j}$

$D_j = \mathbb{C} b_j$

$E = D_1 \oplus \dots \oplus D_n$ somme directe hortogonale.

$x \in D_j$, $u(x) = e^{i\theta_j} x$, rotation d'angle $\theta_j$

dém : Par récurrence sur $\dim E$.

(1) $A = (a)$, $A^* = (\bar{a})$.

$A^* = A \Leftrightarrow \bar{a} = a \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}$.

Supposons le résultat vrai en dimension $\geqslant n-1$.

et prenons $\dim E = n$.

$\exists$ valeur propre $\lambda_1 \in \mathbb{C}$.

$u(v_1) = \lambda_1 v_1 \qquad v_1 \neq 0.$

$b_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 \qquad \|b_1\| = 1$

$u(b_1) = \lambda_1 b_1$

$\langle u(b_1), b_1 \rangle = \langle b_1, u(b_1) \rangle.$

$\overline{\lambda_1} = \lambda_1.$

donc les valeurs propres sont réelles

$\delta = \mathbb{C} b_1$ droite propre

$u(\delta) \subset \delta \Rightarrow u^*(\delta^\perp) \subset \delta^\perp$

$\Rightarrow u(\delta^\perp) \subset \delta^\perp$

$\dim \delta^\perp = n-1.$

$u|_{\delta^\perp} \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\delta^\perp, \delta^\perp)$ encore symétrique.

par hypothèse de récurrence,

$\exists (b_1, \dots b_n)$ B.O. de $\delta^\perp$ formée de vecteurs propres, de valeurs propres réelles $\lambda_2, \dots \lambda_n$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\delta = \mathbb{C} b_1}\!\!\!\underbrace{\begin{matrix} 0 & & 0 \\ \lambda_2 & & 0 \\ 0 & \ddots & \lambda_n \end{matrix}}_{\delta^\perp} \qquad E = \delta \oplus \delta^\perp$$

(2) Cas unitaire $\quad \|b_1\| = 1$ tq $u(b_1) = \lambda_1 b_1$

$\| u(b_1) \| = |\lambda_1|$

$\| u(b_1) \| = \| b_1 \| \Rightarrow |\lambda_1| = 1.$

Les valp sont de module 1.

$S = \mathbb{C}\, b_1 \ , \quad u(S) \subset S \Rightarrow u^*(S^\perp) \subset S^\perp$

$\Rightarrow u^{-1}(S^\perp) \subset S^\perp$

$u$, $u^{-1}$ inversibles, donc les inclusions sont des égalités (par préservation des dimensions)

donc $u^{-1}(S^\perp) = S^\perp \Leftrightarrow u(S^\perp) = S^\perp$

<u>Remarque</u> : Cas antisymétrique.

$u^* = -u.$

Si $v$ vecteur propre $v \neq 0$, $u(v) = \lambda v$

$\langle u^*(v), v \rangle = \langle v, u(v) \rangle$

$\langle -\lambda v, v \rangle = \langle v, \lambda v \rangle$

$-\bar{\lambda} \|v\|^2 = \lambda \|v\|^2$

$\bar{\lambda} = -\lambda \Leftrightarrow \lambda \in i\mathbb{R}.$

$u^* = -u \Leftrightarrow (iu)^* = iu.$

$u$ anti-sym $\Leftrightarrow$ $iu$ sym.