<u>Def</u> ~~Soit~~ E est un e.v sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ on appelle forme sesquilinéaire φ une application

$$\varphi : E \times E \to \mathbb{C} \quad \text{telle que}$$

$x \mapsto \varphi(x,y)$ est $\mathbb{C}$-antilinéaire $\forall y \in E$

$$\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \overline{\lambda}_1 \varphi(x_1, y) + \overline{\lambda}_2 \varphi(x_2, y)$$

$\forall x \in E \quad y \mapsto \varphi(x,y)$ est $\mathbb{C}$-linéaire

---

pas cours du 12 au 16 Mars

01/03/2012 <u>Formes sesquilinéaires</u>

E e.v. sur $\mathbb{C}$ $\quad (x,y) \mapsto \varphi(x,y)$ sesquilinéaire

$\varphi(\lambda x, y) = \overline{\lambda}\, \varphi(x,y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$

$\varphi(x, y_1 + y_2) = \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2)$

$\varphi(x, \mu y) = \mu\, \varphi(x,y) \quad \forall \mu \in \mathbb{C}$ (celà $\varphi(x_1 + x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y)$

En dimension finie (~~avec~~ les coordonnées (x_i) dans une base e_i

$$\varphi(x,y) = \sum_{1 \le j,k \le n} c_{jk}\, \overline{x}_j\, y_k = X^* C Y$$

$$c_{j,k} = \varphi(e_i, e_k) \qquad M^* = \overline{M^t}$$

$\exists$ toujours des bases orthogonale si φ est hermitienne

<u>Définition</u> $x \perp y \underset{\text{def}}{\iff} \varphi(x,y) = 0$

(lorsque φ est hermitienne)

F s.e.v sur $\mathbb{C}$ $\quad F^\perp = \{ y \in E \,/\, \forall x \in F \;\; x \perp y \; (\varphi(x,y) = 0) \}$

$\operatorname{Ker} \varphi = E^\perp = \{ y \in E \,/\, CY = 0 \}$ donné par Ker C

$\varphi(x,y) \in \mathbb{C}$ $\varphi(x,y) = re^{i\theta}$ avec $r = |\varphi(x,y)| \geq 0$

$\mathbb{R} \ni r = e^{-i\theta}\varphi(x,y) = \overline{e^{i\theta}}\varphi(x,y) = \varphi(e^{i\theta}x, y)$

$= |\mathrm{Re}\,\varphi(e^{i\theta}x, y)|$

$|\varphi(x,y)| = r = |\mathrm{Re}\,\varphi(e^{i\theta}x, y)| \underset{(*)}{\leq} \|e^{i\theta}x\|\,\|y\| = \|x\|\cdot\|y\|$

car $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$

Si de plus q est définie >0 l'égalité se produit seulement si $e^{i\theta}x$ et y sont $\mathbb{R}$-colinéaires, ce qui implique x, y $\mathbb{C}$-linéairement dépendants

réciproquement x, y sont $\mathbb{C}$-linéairement dépendants, par exemple $x = \lambda y$, alors

$\varphi(x,y) = \varphi(\lambda y, y) = \overline{\lambda}\,\varphi(y,y) = \overline{\lambda}\,q(y)$

donc $|\varphi(x,y)| = |\lambda|\,q(y)$ car $q(y) \geq 0$

$\|x\| = |\lambda|\,\|y\| = |\lambda|\sqrt{q(y)}$

$\|y\| = \sqrt{q(y)}$ $\Rightarrow \|x\|\,\|y\| = |\lambda|\,q(y)$

__Exemple__ $E = \mathcal{C}([a,b]; \mathbb{C})$

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b \overline{f(t)}\,g(t)\,dt$$

$$\overline{\langle g, f\rangle} = \overline{\int_a^b \overline{g(t)}\,f(t)\,dt} = \langle f, g\rangle$$

$$q(f) = \langle f, f\rangle = \int_a^b |f(t)|^2\,dt \geq 0$$

Si $f \neq 0$ $q(f) > 0$

φ forme hermitienne définie positive

Cauchy-Schwarz $\Rightarrow$

$$\left|\int_a^b \overline{f(t)}\,g(t)\,dt\right| \leq \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}\ \sqrt{\int_a^b |g(t)|^2 dt}$$

avec égalité si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ tq $f = \lambda g$ ou $g = \lambda f$

Def On appelle <u>espace hermitien</u> un e.v. E sur $\mathbb{C}$ muni d'une forme hermitienne définie positive.

En dimension finie on peut trouver des bases orthonormées (sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

<u>Méthode de Gram-Schmidt</u>

F s.e.v de E muni d'une base $(a_1, \dots, a_p)$ non orthonormée

$\rightsquigarrow$ $(b_1, \dots, b_p)$ orthonormée ?

$b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} a_1$ on a bien $\|b_1\| = 1$

récurrence $\tilde{a}_j = a_j + \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_{j-1} b_{j-1}$

$\cancel{\forall k \ \langle \tilde{a}_j, b_k \rangle}$

$0 = \langle b_k, \tilde{a}_j \rangle = \langle b_k, a_j \rangle + \lambda_k$

$$\boxed{\tilde{a}_j = a_j - \sum_{k=1}^{j-1} \langle b_k, a_j \rangle b_k} \perp b_1, \dots, b_{j-1}$$

$b_j = \frac{1}{\|\tilde{a}_j\|} \tilde{a}_j$ à chaque étape

$\mathrm{Vect}(a_1, \dots, a_j) = \mathrm{Vect}(b_1, \dots, b_j)$

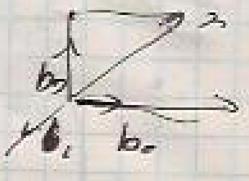
donc $\tilde{a}_j \neq 0$

Formules essentielles

$(b_1, \dots, b_n)$ base orthonormée de E

$x \in E$ s'écrit $x = \sum_{j=1}^{n} x_j b_j$

$x_j = \langle b_j, x \rangle$



Attention il faut mettre x à droite pour que cela soit linéaire

F s.e.v. de E alors $E = F \oplus F^{\perp}$

Π_F ? Gram-Schmidt $\rightsquigarrow$ base orthonormée $(b_1, \dots, b_p)$ de F

$$\boxed{\Pi_F(x) = \sum_{j=1}^{p} \langle b_j, x \rangle b_j}$$

Π_F projection orthogonale sur F.

Symmétrie orthogonale par rapport à F

$$\sigma_F(x) = 2\Pi_F(x) - x = 2\sum_{j=1}^{p} \langle b_j, x \rangle - x$$

Endomorphismes symétriques, anti-symétriques, orthogonaux (sur $\mathbb{R}$); hermitiens, anti hermitiens, unitaires (sur $\mathbb{C}$)

Commençons par le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Soit E un e.v. sur $\mathbb{C}$ de dimension finie n, muni d'un produit scalaire $\langle \, , \, \rangle$ défini positif.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ base orthonormée

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{x_j} y_j = X^* Y$$

$\mathrm{Mat}_{(e_j)}(\langle , \rangle) = (\langle e_j, e_k \rangle) = (\delta_{jk}) = I$

Soit $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E) = \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E, E)$

$\mathrm{Mat}_{(e_j)}(u) = A$

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} u(e_1) & & u(e_n) \end{array} \\ & \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ \\ e_n \end{array}$$

Théorème Il existe $u^* \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E)$ unique avec la p^t

$\forall x, y \in E \quad \langle x, u(y) \rangle = \langle u^*(x), y \rangle$

et de plus $\mathrm{Mat}_{(e_j)}(u^*) = A^* = (\mathrm{Mat}_{(e_j)}(u))^*$

Dém

$\langle x, u(y) \rangle = X^*(AY) = (A^* X)^* Y = \langle u^*(x), y \rangle$

unique choix possible

Def1 u^* est l'endomorphisme adjoint de u

Def2 On dit que

* u est symétrique ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), hermitien ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) si $u^* = u$
* u est antisymétrique ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), antihermitien ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) si $u^* = -u$

Si M matrice réelle $M^* = \overline{M^t} = M^t$

Observation

- Si F s.e.v de E sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Π_F projection orthogonale et σ_F symétrie orthogonale sont des endomorphismes symétrique

$E = F \oplus F^\perp$

$x = x' + x''$ $\quad \langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle + \langle x'', y'' \rangle$

$y = y' + y''$

$\pi_F(x) = x'$

$\langle x, \pi_F(y) \rangle = \langle x'+x'', y' \rangle = \langle x', y' \rangle \cancel{= \langle x', y'+y'' \rangle}$

$= \langle \pi_F(x), y \rangle = \langle x', y'+y'' \rangle = \langle x', y' \rangle$

On a bien $\langle \pi_F(x), y \rangle = \langle x, \pi_F(y) \rangle = \langle \pi_F^*(x), y \rangle$

$\sigma_F = 2\pi_F - Id_E \Rightarrow \sigma_F = \sigma_F^*$

car $Id_E^* = Id_E$

<u>Proposition</u> Soit $u \in End_{\mathbb{K}}(E)$

Si S est un sous-espace stable pour u

$\Leftrightarrow S^\perp$ est un sous-espace stable pour u^*

Dém comme $(u^*)^* u$ il suffit de démontrer $\Rightarrow$

$u(S) \subset S \overset{?}{\Rightarrow} u^*(S^\perp) \subset S^\perp$

Supposons $u(S) \subset S$. Prenons $x \in S^\perp$, question $u^*(x) \in S^\perp$?

$y \in S$ $\langle u^*(x), y \rangle = \langle \underset{\in S^\perp}{x}, \underset{\in S}{\underline{u(y)}} \rangle = 0$ CQFD

<u>Conséquence</u> Soit $E = F \oplus F'$ somme directe

$\pi_{F,F'} : E \to E$ projection sur F // F'

$\pi_{F,F'}^*$?

<u>Formules</u>

1) $Ker\, u^* = (Im\, u)^\perp$

2) $Im(u^*) = (Ker\, u)^\perp$

Dem de (1) $x \in E$ tq $u^*(x) = 0 \Leftrightarrow \forall y \in E \; \langle u^*(x), y \rangle = 0$

$\Rightarrow \forall y \in E \; \langle x, u(y) \rangle = 0 \Leftrightarrow x \in (Im\, u)^\perp$ (car $E^\perp = \{0\}$

Dem de (2) On applique (1) à u^*

$\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^{**} = (\operatorname{Im}(u^*))^\perp$

$(\operatorname{Ker} u)^\perp = (\operatorname{Im} u)^{\perp\perp} = \operatorname{Im} u^*$