CHAPITRE IV

Formes sesquilinéaires

Objectif : Généraliser le produit scalaire et la norme à des espaces complexes.

$E = \mathbb{C}^n$, $z = (z_1, \dots z_n)$ $\quad z_j \in \mathbb{C}$

$\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$, $z_j = x_j + i y_j$, $\quad x_j, y_j \in \mathbb{R}$

$$|z_j|^2 = x_j^2 + y_j^2$$

Norme usuelle de $\mathbb{C}^n$:

$\|z\|^2 = |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2$

$\|z\| = \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2}$

$z = (z_1, \dots z_n)$ $\quad w = (w_1, \dots w_n)$.

$\langle z, w \rangle = \overline{z_1} w_1 + \dots + \overline{z_n} w_n$ par définition.

$\langle z, z \rangle = \|z\|^2$.

$\lambda \in \mathbb{C}$, $\langle \lambda z, w \rangle = \overline{\lambda} \langle z, w \rangle$

$\mu \in \mathbb{C}$ $\langle z, \mu w \rangle = \mu \langle z, w \rangle$

Définition : Si E est un e.v sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on appelle forme sesquilinéaire φ une application, $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que :

① $x \longmapsto \varphi(x, y)$ $\mathbb{C}$ anti-linéaire $\forall y \in E$,

$$\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \overline{\lambda_1} \varphi(x_1, y) + \overline{\lambda_2} \varphi(x_2, y)$$

② $y \longmapsto \varphi(x, y)$ $\mathbb{C}$-linéaire, $\forall x \in E$,

$$\varphi(x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) = \mu_1 \varphi(x, y_1) + \mu_2 \varphi(x, y_2).$$

Ecriture matricielle en dimension finie.

Soit $B = (e_1, \dots e_n)$ une base de E.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ coordonnées complexes $x, y \in E$

$$\varphi(x,y) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right)$$

donc $\varphi(x,y) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \varphi(e_i, e_j)\, \overline{x_i}\, y_j$

Définition : $C = \mathrm{Mat}_B(\varphi) = \left(\varphi(e_i, e_j)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$

$c_{ij} = \varphi(e_i, e_j) \in \mathbb{C}$.

Matrice adjointe d'une matrice.

$M = (m_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq p}}$ $\quad n \times p$

$M^* = \overline{M}^t = (\overline{m_{kj}})_{\substack{1 \leq k \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ $\quad p \times n$.

Propriétés : • $(M + M')^* = M^* + (M')^*$

• $(MM')^* = (M')^* M^*$.

• $(\lambda M)^* = \overline{\lambda}\, M^*$

Formule : $\boxed{\varphi(x,y) = X^* C Y.}$

Forme sesquilinéaire adjointe de φ :

$$\varphi^*(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$$

φ sesquilinéaire $\Leftrightarrow$ φ^* sesquilinéaire.

$$\bullet\ \varphi^*(\lambda x, y) = \overline{\varphi(y, \lambda x)} = \overline{\lambda \varphi(y,x)} = \bar{\lambda}\, \varphi^*(x,y).$$

$$\bullet\ \varphi^*(x, \mu y) = \overline{\varphi(\mu y, x)} = \overline{\bar{\mu}\, \varphi(\mu, x)} = \mu\, \varphi^*(x,y)$$

Définition : $C = \mathrm{Mat}_B(\varphi) = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}$.

$\mathrm{Mat}_B(\varphi^*) = \left(\overline{\varphi(e_j, e_i)}\right) = C^*$

Définition : On dit que :

- φ est symétrique si $\varphi^* = \varphi \Leftrightarrow C^* = C$.
- φ est antisymétrique si $\varphi^* = -\varphi \Leftrightarrow C^* = -C$

$\Leftrightarrow \overline{c_{kj}} = -c_{jk}$

Une forme hermitienne est une forme sesquilinéaire symétrique

Une forme anti-hermitienne est une forme sesquilinéaire anti-sym.

Seq (E) est un $\mathbb{C}$-e.v isomorphe aux matrices $C = (c_{jk})$ complexes $n \times n$.

$\dim_{\mathbb{C}}$ Sesq $(E) = n^2$, pour $n = 2$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Sesq}(E) = 2n^2$, pour $n=2$:

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&i\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&i\end{pmatrix}$$

φ sesquilinéaire quelconque :

$$\varphi = \frac{1}{2}(\varphi+\varphi^*) + \frac{1}{2}(\varphi-\varphi^*)$$
$$= \underbrace{\sigma}_{\text{symétrique}} + \underbrace{\alpha}_{\text{anti-symétrique}}.$$

$$\boxed{\mathrm{Sesq}(E) = \mathrm{Herm}(E) \oplus \mathrm{Anti\,Herm}(E).}$$

φ hermitienne $\varphi^* = \varphi$

$\psi = i\varphi$ d'où $\psi^* = -i\varphi^* = -\psi^*$

donc φ hermitienne $\Leftrightarrow$ $i\varphi$ anti-hermitienne.

$\mathrm{Herm}(E)$ est seulement un $\mathbb{R}$-ev !!

$$\mathrm{Herm}(E) \xrightarrow{\ \simeq\ } \mathrm{Anti\,Herm}(E) \quad \longleftarrow \text{isomorphisme !}$$
$$\varphi \longmapsto i\varphi.$$

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Herm}(E) = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Anti\,Herm}(E).$$
$$= \frac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Sesq}(E) = n^2.$$

Définition : Si φ est sesquilinéaire, on lui associe une forme quadratique q tq :

$$q(x) = \varphi(x,x).$$

$\varphi = \sigma + \alpha$ d'où $\varphi(x,x) = \sigma(x,x) + \alpha(x,x)$

et $\overline{\sigma(x,x)} = \sigma(x,x)$ $\quad \sigma(x,x) \in \mathbb{R}$.

$\overline{\alpha(x,x)} = -\alpha(x,x). \in i\mathbb{R}$.

Conséquence : φ est hermitienne $\Leftrightarrow$ $\varphi(x,x)$ est réelle $\forall x \in E$.

Formules de polarisation.

Supposons φ hermitienne. $\Rightarrow$ $q(x) = \varphi(x,x)$ est réelle.

But : retrouver φ à partir de q.

$$q(x+y) = \varphi(x+y, x+y).$$
$$= q(x) + q(y) + \varphi(x,y) + \varphi(y,x).$$

$$q(x-y) = \varphi(x-y, x-y).$$
$$= q(x) + q(y) - \varphi(x,y) - \varphi(y,x).$$

$$\frac{1}{2}\left(\varphi(x,y) + \varphi(y,x)\right) = \frac{1}{4}\left(q(x+y) - q(x-y)\right).$$

$$\boxed{\mathrm{Re}\left(\varphi(x,y)\right) = \frac{1}{4}\left(q(x+y) - q(x-y)\right)}$$

car $\varphi(y,x) = \overline{\varphi(x,y)}$

$\mathrm{Im}\, z = y = \mathrm{Re}(-iz)$.

$z = x+iy$, $-iz = y - ix$

$$\mathrm{Im}\left(\varphi(x,y)\right) = \mathrm{Re}\left(-i\varphi(x,y)\right) = \mathrm{Re}\left(\varphi(x,-iy)\right)$$

$$\boxed{\mathrm{Im}\left(\varphi(x,y)\right) = \frac{1}{4}\left(q(x-iy) - q(x+iy)\right)}$$

$\varphi(x,y) = \mathrm{Re}\,(\varphi(x,y)) + i\,\mathrm{Im}\,(\varphi(x,y))$.

donc $\boxed{\varphi(x,y) = \frac{1}{4}\left(q(x+y) - q(x-y) + iq(x-iy) - iq(x+iy)\right)}$

$\longrightarrow$ Formule de polarisation.

En connaissant q, on retrouve φ.

Méthode de Gauss:

$E = \mathbb{C}^2 \ni (z, w)$

$q(z,w) = 3z\bar{z} - 2iz\bar{w} + 2iw\bar{z} - 5w\bar{w}$

φ forme sesquilinéaire associée.

$x = (z,w)$, $x' = (z', w')$.

$$\varphi(x,x') = \varphi((z,w),(z',w')).$$
$$= 3\bar{z}z' - 2i\bar{w}z' + 2i\bar{z}w' - 5\bar{w}w'.$$

d'où $\mathrm{Mat}\,(\varphi) = \begin{pmatrix} 3 & 2i \\ -2i & -5 \end{pmatrix}$

$$q(z,w) = 3\left(\bar{z}z - \frac{2i}{3}\bar{z}w - \frac{2i}{3}\bar{w}z\right) - 5w\bar{w}$$
$$= 3\overline{\left(z + \frac{2i}{3}w\right)}\left(z + \frac{2i}{3}w\right) - \frac{19}{3}w\bar{w}$$
$$= 3\,|\ell_1(z,w)|^2 - \frac{19}{3}|\ell_2(w)|^2$$

avec $\ell_1(z,w) = z + \frac{2i}{3}w$.

$\ell_2(w) = w$

Changement de coordonnées

$$\begin{cases} \tilde{z} = z + \frac{2i}{3} w \\ \tilde{w} = w \end{cases} \iff \begin{cases} z = \tilde{z} - \frac{2i}{3}\tilde{w} \\ w = \tilde{w} . \end{cases}$$

$$\tilde{X} = LX \qquad\qquad X = P\tilde{X}$$

L est la matrice des formes linéaire ℓ_1 et ℓ_2. $P = L^{-1}$.

$$P = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2i}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} \overset{\shortparallel}{\tilde{e_1}} & \overset{\shortparallel}{\tilde{e_2}} \end{array} \end{array} \qquad \text{avec } \tilde{e_1} = (1, 0) \in \mathbb{C}^2$$
$$\tilde{e_2} = \left(-\frac{2i}{3}, 1\right) \in \mathbb{C}^2$$

$$q(z, w) = 3|\tilde{z}|^2 - \frac{19}{3}|\tilde{w}|^2$$

$$\varphi\left((z,w), (z',w')\right) = 3\overline{\tilde{z}}\,\tilde{z}' - \frac{19}{3}\overline{\tilde{w}}\,\tilde{w}'$$

$$\operatorname{Mat}_{(\tilde{e_1}, \tilde{e_2})}(\varphi) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -\frac{19}{3} \end{pmatrix}.$$

$(\tilde{e_1}, \tilde{e_2})$ base orthogonale, rang $= 2$, signature $(\underset{+}{1}, \underset{-}{1})$

Méthode de Gauss quand la forme quadratique ne contient pas de carrés du type $\overline{z_j} z_j$.

Supposons que l'on a deux termes rectangles $\overline{z_1} z_2$

$$x = (z_1, \dots z_n) \in E = \mathbb{C}^2$$

$$\begin{aligned} q(x) = \; & c_{12}\overline{z_1} z_2 + c_{13}\overline{z_1} z_3 + \dots + c_{1n}\overline{z_1} z_n \\ & + \overline{c_{12}}\,\overline{z_2} z_1 + \dots + \overline{c_{1n}}\,\overline{z_n} z_1 \\ & + c_{23}\overline{z_2} z_3 + \dots + c_{2n}\overline{z_2} z_n \\ & + \overline{c_{23}}\,\overline{z_3} z_2 + \dots + \overline{c_{2n}}\,\overline{z_n} z_2 \quad + (\dots \overline{z_j} z_k)_{j,k \geq 3} \end{aligned}$$

$$c_{12}\left(z_1+\frac{c_{23}}{c_{12}}z_3+\dots+\frac{c_{2n}}{c_{12}}z_n\right)\left(z_2+\frac{c_{13}}{c_{12}}z_3+\dots+\frac{c_{1n}}{c_{12}}z_n\right)$$

on introduit : $\ell_1(x) = z_1+\frac{c_{23}}{c_{12}}z_3+\dots+\frac{c_{2n}}{c_{12}}z_n$.

et $\ell_2(x) = z_2+\frac{c_{13}}{c_{12}}z_3+\dots+\frac{c_{1n}}{c_{12}}z_n$.

donc $q(x) = c_{12}\,\overline{\ell_1(x)}\,\ell_2(x) + \overline{c_{12}}\,\overline{\ell_2(x)}\,\ell_1(x) + \tilde{q}(x)$

$\tilde{q}(x)$ ne contient plus de z_1, z_2.

Reste à transformer :

$c_{12}\,\overline{\ell_1(x)}\,\ell_2(x) + \overline{c_{12}}\,\overline{\ell_2(x)}\,\ell_1(x)$

$= \bar{A}B+\bar{B}A$ avec $A = \ell_1(x)$ et $B = c_{12}\,\ell_2(x)$

$$\bar{A}B+\bar{B}A = \frac{1}{4}\left(|A+B|^2-|A-B|^2\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(|\ell_1(x)+c_{12}\ell_2(x)|^2 - |\ell_1(x)-c_{12}\ell_2(x)|^2\right)$$

Théorème : Toute forme hermitienne φ admet une base orthogonale, qui s'obtient par la méthode de Gauss.

Changement de base : $\varphi(x,y) = X^* C Y$ dans B.

$B \rightsquigarrow \tilde{B}$ matrice de passage P.

$$\left.\begin{array}{l} X = P\tilde{X} \\ Y = P\tilde{Y} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(x,y) = \tilde{X}^*(P^*CP)\tilde{Y}$$

$$\mathrm{Mat}_B(\varphi) = C \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\tilde{B}}(\varphi) = \tilde{C} = P^*CP$$

Théorème : Il existe une matrice de passage P telle que :

$P^* C P = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$, diagonale à coefficient réels a_j.

Calcul de P:

méthode de Gauss $\rightsquigarrow \begin{cases} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_r \end{cases}$ où $r = \operatorname{rang}(\varphi) = \operatorname{rang}(C) \leq n$.

on complète en une base $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$

$L = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix} \rightsquigarrow P = L^{-1}$.

Théorème de Sylvester Pour deux bases orthogonales $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, les nombres $\left\{ \begin{array}{l} p_+ \text{ de signes positifs} \\ p_- \text{ de signes négatifs.} \end{array} \right\}$ sont les mêmes

(p_+, p_-) signature $\quad p_+ + p_- = r$.