$\text{Ker}\, \varphi = \{ y$ de coordonnée Y tq $CY = 0 \}$
noyau de $Y \mapsto CY$

23/02/2012

Espace euclidien

E muni de φ F.B.S. définie positive

Notation fréquente $\langle x, y \rangle = \varphi(x,y)$

ou $x \cdot y = \varphi(x,y)$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit φ une FBS semi-positive sur le $\mathbb{R}$ ev E

Alors $|\varphi(x,y)| \leq \|x\| \|y\| = \sqrt{q(x)} \sqrt{q(y)}$

où $q(x) = \varphi(x,x)$

Dém Regardons

$P(\lambda) = q(\lambda x + y) = \varphi(\lambda x + y, \lambda x + y)$

$= \lambda^2 \varphi(x,x) + 2\lambda \varphi(x,y) + \varphi(y,y)$

$= \lambda^2 q(x) + 2\lambda \varphi(x,y) + q(y)$

1er cas Supposons $q(x) > 0$ $\boxed{(\text{c'est} = !)}$

On a $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $P(\lambda) \geq 0$

On ne peut avoir $\Delta > 0$, sinon le trinôme admet 2 racines distinctes $\lambda_1 < \lambda_2$ et $P(\lambda) < 0$ si $\lambda \in]\lambda_1, \lambda_2[$

seulement possible $\Delta \leq 0$ (racine double ou complexes)

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(2\varphi(x,y)\right)^2 - 4\,q(x)\,q(y) \leq 0$$

$$\Rightarrow \left(\varphi(x,y)\right)^2 \leq q(x)\,q(y)$$

<u>2° cas</u> $q(x) = 0$

$$P(\lambda) = 2\lambda\,\varphi(x,y) + q(y) \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Si $\varphi(x,y) \neq 0$ $P(\lambda)$ changerait de signe pour $\lambda = \frac{-q(y)}{\varphi(x,y)}$

donc $\varphi(x,y) = 0$

<u>Inégalité triangulaire</u>

c'est

$$\|x+y\|^2 = q(x+y) = q(x) + 2\varphi(x,y) + q(y)$$

$$\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| = \left(\|x\| + \|y\|\right)^2$$

Cauchy-Schwarz

Conséquence $\|x+y\| \geq \big|\,\|x\| - \|y\|\,\big|$

$$\|x\| = \|(x+y) + (-y)\| \leq \|x+y\| + \|-y\| = \|x+y\| + \|y\|$$

$\Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x+y\|$ et l'autre en échangeant x et y

Discussion du cas d'égalité dans C.-S.

$$|\varphi(x,y)| = q(x)\,q(y)$$

correspond au cas $\Delta = 0$ cas où il existe une racine double, c'est à dire $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $q(\lambda x + y) = 0$

Sous l'hypothèse que q est définie positive (pas de vecteur isotrope autre que 0) on n'ait plus d'égalité

S'ils sont colinéaires de m̃ sens $y = \lambda x, \lambda \geq 0$

$<x,y> = \lambda <x,x> = \lambda \|x\| \|y\| = \|x\| \|y\|$

colinéaires de sens contraire $y = -\lambda x \quad \lambda > 0$

$<x,y> = -\lambda <x,x> = -\|x\| \|y\|$

Cas d'égalité $\varphi(x,y) = \|x\|\|y\|$ x et y colinéaires de m̃ sens
sous l'hypothèse

φ définie positive. $\varphi(x,y) = -\|x\| \|y\|$ ——— sens contraire

dans l'inégalité triangulaire $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$
ssi x et y colinéaires de m̃ sens.

<u>Remarque</u> Si φ est semipositive

$\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Isotrope}(\varphi)$

(en général $\mathrm{Ker}\,\varphi \subset \mathrm{Isotrope}(\varphi)$)

montrons $\mathrm{Isotrope}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}\,\varphi$

x isotrope $\Leftrightarrow q(x) = 0$

$\forall y \in E \quad |\varphi(x,y)| \leq \sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)} = 0$

donc $x \in E^{\perp} = \mathrm{Ker}(\varphi)$

<u>Géométrie dans les espaces euclidiens de dimension finie</u>

<u>Thm</u> Si E est euclidien de dim finie n il existe toujours une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$

$\mathbb{R}^n \to E \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$

$\varphi(x,y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

E s'identifie à l'espace $\mathbb{R}^n$ avec son produit scalaire usuel

projection orthogonale

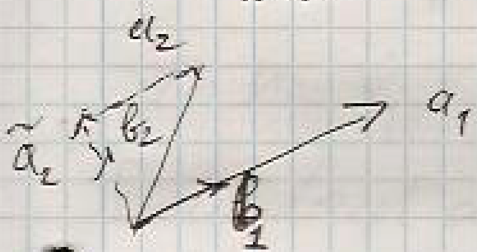
Soit F un sous-espace vectoriel de E de dim p muni d'une base $(a_1, \dots, a_p)$

$(F, \varphi_{|F\times F})$ est encore un espace euclidien

Procédé de Gram-Schmidt

But trouver une base orthonormée $(b_1, \dots, b_p)$ de F

$b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} a_1 \rightsquigarrow \|b_1\| = 1$



On cherche $\tilde{a}_2 = a_2 + \lambda b_1$

pour que $\tilde{a}_2 \perp b_1$

$\langle \tilde{a}_2, b_1 \rangle = \langle a_2 \cdot b_1 \rangle + \lambda$

$\lambda = - \langle a_2, b_1 \rangle$

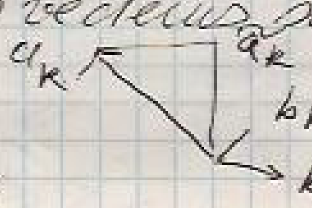
$\tilde{a}_2 = a_2 - \langle a_2, b_1 \rangle b_1$

$b_2 = \frac{1}{\|\tilde{a}_2\|} \tilde{a}_2 \rightsquigarrow \|b_2\| = 1$ et $b_2 \perp b_1$

par récurrence sur les vecteurs successifs

$b_1, \dots, b_{k-1}$

$\tilde{a}_k = a_k + \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_{k-1} b_{k-1}$



pas dans $\mathrm{Vect}(a_1, \dots, a_{k-1})$

$=$

$\mathrm{Vect}(b_1, \dots, b_{k-1})$

$\tilde{a}_k \perp b_j \quad j = 1, \ldots, k-1$

$\langle \tilde{a}_k, b_j \rangle = \langle a_k, b_j \rangle + \lambda_j$

on prend

$$\tilde{a}_k = a_k - \left(\langle a_k, b_1 \rangle b_1 + \cdots + \langle a_k, b_{k-1} \rangle b_{k-1}\right)$$

on calcule $b_k = \frac{1}{\|\tilde{a}_k\|} \tilde{a}_k$

Ce qui donne $(b_1, \ldots, b_p)$ base orthonormée de F

Fait Dans un espace euclidien $\forall F$ s.e.v. de E

$$F \oplus F^\perp = E$$

A vérifier $F \cap F^\perp = \{0\}$

Si $F \cap F^\perp \neq \{0\}$ $\exists x \in F, x \neq 0$ tel que $x \perp F$

$x \in \operatorname{Ker} \varphi_{|F \times F} = \operatorname{Isotrope}(\varphi_{|F\times F}) = \{0\}$ par hypothèse

Pour tout $x \in E$, on peut écrire de manière unique $x = x' + x''$ avec $x' \in F$ et $x'' \in F^\perp$

$$x' = \pi_F(x) \text{ projection sur } F \ /\!/ \ F^\perp$$

$$x'' = \pi_{F^\perp}(x) \text{ ——— } F^\perp /\!/ \ F$$

Si besoin on détermine $(b_1, \ldots, b_p)$ base orthonormée de F

$x = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_p b_p$

$\lambda_j = \langle x', b_j \rangle = \langle x, b_j \rangle -$

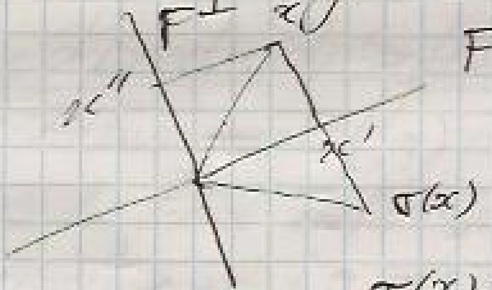
car $\langle x, b_j \rangle = \langle x', b_j \rangle + \langle x'', b_j \rangle$

$\overset{\|}{0}$ car $x'' \in F^{\perp}$, $b_j \in F$

<u>Remarque</u> dans une base orthonormée les coordonnées d'un vecteur sont données par les produits <u>scalaires avec les vecteurs de base</u>

$$\boxed{\Pi_F(x) = \bar{x} = \langle b_1, x \rangle b_1 + \cdots + \langle b_p, x \rangle b_p}$$

Symétrie orthogonale par rapport à F



$x = x' + x''$

$\sigma(x) = x' - x''$

$\sigma(x) = 2x' - x = 2p_F(x) - x$

$$\boxed{\sigma_F = 2\Pi_F - Id_E}$$

Formule

$$\sigma_F(x) = 2(\langle b_1, x \rangle b_1 + \cdots + \langle b_p, x \rangle b_p) - x$$

<u>Signature et théorème d'inertie de Sylvester</u>

E $\mathbb{R}$ e.v. de dim finie, et $q(x) = \varphi(x, x)$ forme quadratique quelconque

$\exists B(u_1, u_2, \dots, u_n)$ base orthogonale

$Mat_B(\varphi) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ $a_j = \varphi(u_j, u_j) = q(u_j)$

Quitte à réordonner la base, on peut supposer

$\underbrace{a_1, \dots, a_p}_{>0}, \underbrace{a_{p+1} \dots a_{p+q}}_{<0}, \underbrace{a_{p+q+1}, \dots, a_n}_{=0}$

$$E = F_+ \oplus F_- \oplus F_0$$

$(a_1, \dots, a_p)$ $(a_{p+1}, \dots, a_{p+q})$ $(a_{p+q+1}, \dots a_n)$

p vecteurs q vecteurs

$$\boxed{p+q = r = \text{rang}(\varphi)}$$

Théorème d'inertie de Sylvester

les dimensions (p, q) ne dépendent pas du choix de la base orthogonale $\mathcal{B}$

par définition (p, q) est la signature de φ

Dém $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n)$ autre base orthogonale

$$E = \tilde{F}_+ \oplus \tilde{F}_- \oplus \tilde{F}_0$$

$\tilde{F}_0 = F_0$ (car $F_0 = \text{Ker}(\varphi)$)

$$p + q = \tilde{p} + \tilde{q} = r = \text{rang}(\varphi)$$

~~Supposons $p < \tilde{p}$~~

Prenons $\tilde{F}_+ \cap (F_- \oplus F_0) = \{0\}$

$x \in \tilde{F}_+$ $\varphi(x,x) > 0$ $x \in F_- \oplus F_0$ $\varphi(x,x) \leq 0$

$\Rightarrow \tilde{F}_+$ et $F_- \oplus F_0$ sont en somme directe donc

$\dim \tilde{E}_+ + \dim E_- + \dim F_0 \leq n$

$\tilde{p} + q + (n-r) \leq n$

$\Rightarrow \tilde{p} + q \leq r \Rightarrow \tilde{p} \leq r - q = p$

de même $p \leq \tilde{p}$ donc $p = \tilde{p}$ et $q = r - p = r - \tilde{p} = \tilde{q}$

Formes sesquilinéaires

Objectif : généraliser produit scalaire et norme à des espaces complexes

$E = \mathbb{C}^n$

$z = (z_1, \dots, z_n) \quad z_i \in \mathbb{C} \qquad \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$

Norme usuelle de $\mathbb{C}^n$ $\qquad z_j = x_j + i y_j \quad x_j, y_j \in \mathbb{R}$

$\|z\|^2 = |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 \qquad |z_j|^2 = x_j^2 + y_j^2$

$\|z\| = \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2}$

$z = (z_1, \dots, z_n) \quad w = (w_1, \dots, w_n)$

$$\langle z, w \rangle \overset{\text{def}}{=} \bar{z}_1 w_1 + \dots + \bar{z}_n w_n$$

$$\langle z, z \rangle = \|z\|^2$$

$\lambda, \mu \in \mathbb{C} \quad \langle \lambda z, w \rangle = \bar{\lambda} \langle z, w \rangle$

$\langle z, \mu w \rangle = \mu \langle z, w \rangle$

<u>Def</u> ~~E~~ Si $\mathbb{E}$ est un e.v. sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on appelle forme sesquilinéaire φ une application
$\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$ telle que

$x \mapsto \varphi(x, y)$ est $\mathbb{C}$-antilinéaire $\forall y \in E$

$$\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \bar{\lambda}_1 \varphi(x_1, y) + \bar{\lambda}_2 \varphi(x_2, y)$$

$\forall x \in E \quad y \mapsto \varphi(x, y)$ est $\mathbb{C}$-linéaire

---

pas cours du 12 au 16 Mars

01/03/2012 <u>Formes sesquilinéaires</u>

E e.v. sur $\mathbb{C}$ $\quad (x, y) \mapsto \varphi(x, y)$ sesquilinéaire

$\varphi(\lambda x, y) = \bar{\lambda} \varphi(x, y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$ $\qquad \varphi(x, y_1 + y_2) = \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2)$

$\varphi(x, \mu y) = \mu \varphi(x, y) \quad \forall \mu \in \mathbb{C}$ (et $\varphi(x_1 + x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y)$)

En dimension finie (~~dans~~ les coordonnées (x_i) dans une base e_i

$$\varphi(x, y) = \sum_{1 \leq j, k \leq n} c_{jk} \bar{x}_j y_k = X^* C Y$$

$$c_{j,k} = \varphi(e_j, e_k) \qquad M^* = \overline{M^t}$$

$\exists$ toujours des bases orthogonale si φ est ~~g~~ hermitienne

<u>Définition</u> $x \perp y \underset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \varphi(x, y) = 0$

(lorsque φ est hermitienne)

F s.e.v sur $\mathbb{C}$ $\quad F^\perp = \{ y \in E \,/\, \forall x \in F \;\; x \perp y \; (\varphi(x, y) = 0) \}$

$\operatorname{Ker} \varphi = E^\perp = \{ y \in E \,/\, CY = 0 \}$ donné par $\operatorname{Ker} C$