09/02/2012

3848 **Décomposition en carrés - méthode de Gauss**

Exemple $E = \mathbb{R}^4$

$$q(x,y,z,t) = 3xy - 5yz + 4zt + 8xz - 6xt$$

pas de termes carrés !

"terme rectangle" $3xy$

On regroupe les termes qui contiennent x, y et on les factorise $(x+(\dots))(y+(\dots))$ où $(\dots)$ contiennent les autres variables z, t

$$3\left(xy - \frac{5}{3}yz + \frac{8}{3}xz - 2xt\right)$$

$$= 3\left(x - \frac{5}{3}z\right)\left(y + \frac{8}{3}z - 2t\right) + \underbrace{\cancel{3}\frac{5}{\cancel{3}}z\left(\frac{8}{3}z - 2t\right)}_{\frac{40}{3}z^2 - 10zt}$$

$$q(x,y,z,t) = 3\underbrace{\left(x - \frac{5}{3}z\right)}_{A}\underbrace{\left(y + \frac{8}{3}z - 2t\right)}_{B} + \underbrace{\frac{40}{3}z^2 - 6zt}_{\text{ne doit plus contenir de } x,\, y}$$

Formule de polarisation élémentaire

$$AB = \frac{1}{4}\left((A+B)^2 - (A-B)^2\right)$$

$$q(x,y,z,t) = \frac{3}{4}\left(x + y + z - 2t\right)^2 - \frac{3}{4}\left(x - y - \frac{13}{3}z + 2t\right)^2 + \frac{40}{3}\left(z^2 - \frac{9}{20}zt\right)$$

$$\cancel{\frac{3}{4}(x-y+2t)^2 - \frac{3}{4}(x-y-\frac{13}{3}z+2t)^2}$$

$v=(x,y,z,t)$

$q(v) = a_1\, b_1(v)^2 + a_2\, b_2(v)^2 + a_3\, b_3(v)^2 + a_4\, b_4(v)^2$

$a_1 = 3/4 \quad b_1(v) = x+y+z-2t \qquad x+y$
$a_2 = -3/4 \quad b_2(v) = x-y-\frac{13}{3}z+2t \qquad x-y$ } obligatoire

$a_3 = \frac{40}{3} \quad b_3(v)\ z - \frac{9}{40}t$
$a_4 = \frac{-27}{40} \quad b_4(v) = t$
} plus de x, y $\quad \frac{40}{3}\left(\frac{9}{40}\right)^2 t^2$

Elles (les formes $b_1, \dots, b_4$) sont indépendantes

$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4 = 0$

coeff de $x, y \quad (\lambda_1+\lambda_2)x + (\lambda_1-\lambda_2)y + \dots = 0$

$\Rightarrow \lambda_1+\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0$
$\quad \lambda_1 - \lambda_2 = 0$

les autres récurrence (m̂ procédé)

En dim n, $E \simeq \mathbb{K}^n$ $\quad (\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$

$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1\le i,j\le n} c_{ij}\, x_i x_j$

premier cas il y a un terme carré, par exemple
$c_{11}\, x_1^2 \quad c_{11} \neq 0$

les termes contenant x_1 $\quad C=(c_{ij})$ symétrique

$c_{11}x_1^2+2c_{12}x_1x_2+\cdots+2c_{1n}x_1x_n$

$=c_{11}\left(x_1^2+\frac{2c_{12}}{c_{11}}x_1x_2+\cdots+2\frac{c_{1n}}{c_{11}}x_1x_n\right)$

$=c_{11}\left(x_1+\frac{c_{12}}{c_{11}}x_2+\cdots+\frac{c_{1n}}{c_{11}}x_n\right)^2-q'(x_2,\dots,x_n)$

$q(x_1,\dots,x_n)=a_1\,b_1(v)^2+\tilde{q}(x_2,\dots,x_n)$

$a_1=c_{11} \quad b_1(v)=\frac{c_{12}}{c_{11}}x_2+\cdots+\frac{c_{1n}}{c_{11}}x_n$

Par hypothèse de récurrence

$\tilde{q}(x_2,\dots,x_n)=a_2\,b_2(v)^2+\cdots+a_r\,b_r(v)^2$

dans $b_2,\dots,b_r$ x_1 n'apparaît plus formes linéaires en $v=(x_1,\dots,x_n)$ ne contenant pas x_1.

par hyp. de réc. $b_2,\dots,b_r$ sont ind^t

si $\lambda_1b_1+\lambda_2b_2+\cdots+\lambda_rb_r=0$ coeff de x_1 $\lambda_1=0$

donc $\lambda_2b_2+\cdots+\lambda_rb_r=0$ réc $\Rightarrow\lambda_1=\cdots=\lambda_r=0$

Deuxième cas on n'a que des termes rectangles par exemple $2c_{12}x_1x_2$. On regroupe les termes contenant x_1 ou x_2

$$2c_{12}x_1x_2 + 2c_{13}x_1x_3 + \dots + 2c_{1n}x_{1n}$$

$$+ \dots + 2c_{23}x_2x_3 + \dots + 2c_{2n}x_{2n}$$

$$2c_{12}\left(x_1x_2 + \frac{c_{13}}{c_{12}}x_1x_3 + \dots + \frac{c_{1n}}{c_{12}}x_1x_n + \frac{c_{23}}{c_{12}}x_2x_3 + \dots + \frac{c_{2n}}{c_{12}}x_2x_n\right)$$

$$= 2c_{12}\overbrace{\left(x_1 + \frac{c_{23}}{c_{12}}x_3 + \dots + \frac{c_{2n}}{c_{12}}x_n\right)}^{A}\overbrace{\left(x_2 + \frac{c_{13}}{c_{12}}x_3 + \dots + \frac{c_{1n}}{c_{12}}x_n\right)}^{B}$$

$$- q'(x_3, \dots, x_n)$$

$$2c_{12}AB = \frac{c_{12}}{2}\left[(A+B)^2 - (A-B)^2\right]$$

$$q(v) = a_1 l_1^2(v) + a_2 l_2^2(v) + \tilde{q}(x_3, \dots, x_n)$$

$a_1 = \frac{c_{12}}{2}$ $\quad l_1(v) = A+B = x_1 + x_2 + (x_3 \dots)$

$a_2 = -\frac{c_{12}}{2}$ $\quad l_2(v) = A-B = x_1 - x_2 + (x_3 \dots)$

par récurrence $\tilde{q}(x_3, \dots, x_n) = a_3 l_3^2(v) + \dots + a_r l_r^2(v)$

avec $l_3, \dots, l_r$ indépendantes ne contenant pas x_1, x_2

$$\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \dots + \lambda_r l_r = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{matrix}$$

coeff de x_1, x_2

ATTENTION : $\ell_1, \dots, \ell_r$ ind^t $r \leq \dim E^* = \dim E = n$

Théorème (réinterprétation matricielle)

Pour toute forme quadratique $x \mapsto q(x)$ sur un e.v. de dim finie, il existe une ~~changement de~~ base $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_n)$ t.q. si $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ nouvelles coordonnées de x, alors

$$q(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \tilde{x}_j^2$$

$$\varphi(x,y) = \sum_{j=1}^{n} a_j \tilde{x}_j \tilde{y}_j \quad \mathrm{Mat}_{(\tilde{e}_j)}(\varphi) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

Méthode de Gauss

$$q(x) = a_1 \ell_1(x)^2 + \dots + a_r \ell_r(x)^2$$

$(\ell_1, \dots, \ell_r)$ indépendante, $r \leq n$

on complète en une base $\ell_{r+1}, \dots, \ell_n$ base de E^*

Changement de coordonnées $\tilde{x}_1 = \ell_1(x)$

$\vdots$

$\tilde{x}_n = \ell_n(x)$

Matrice colonne $\tilde{X} = LX$

$\det L \neq 0$ car base

$$L = \begin{pmatrix} \ell_{11} & \dots & \ell_{1n} \\ & & \\ \ell_{n1} & \dots & \ell_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \ell_1(x) \\ \text{coeff de } \ell_n \\ \text{conjugué} \end{array}$$

$P = L^{-1}$ $X = L^{-1}\tilde{X} = P\tilde{X}$

P est la matrice de passage de la base initiale $(e_1, \dots, e_n)$ vers $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$

Changement de base dans les formes bilinéaires (resp. quadratiques)

$q(x) = \varphi(x,x)$

$(e_1,\dots,e_n) \quad C=(c_{ij}) = (\varphi(e_i,e_j))_{1\le i,j\le n}$

$\varphi(x,y) = X^t C Y$

$q(x) = X^t C X$

$(\tilde{e}_1,\dots,\tilde{e}_n)$ nouvelle base définie par mat. de pass. P

$$\begin{cases} X = P\tilde{X} & \text{pour } x \\ Y = P\tilde{Y} & \text{pour } y \end{cases}$$

$$\varphi(x,y) = X^t C Y = (\tilde{X}^t P^t) C (P\tilde{Y}) = \tilde{X}(P^t C P)\tilde{Y}$$

$$\boxed{\tilde{C} = \mathrm{Mat}_{(\tilde{e}_j)}(\varphi) = P^t C P}$$

Méthode de Gauss $\forall C$ symétrique,

$\exists$ matrice de passage P telle que $\tilde{C} = P^t C P$ est diagonale.

$P = L^{-1}$ où L est la matrice en ligne des formes linéaires donnant la décomposition en carrés.

$$\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

Si $\mathbb{K}=\mathbb{Q}$ on s'arrête là

si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ $\quad a_j = \varepsilon_j |a_j| \quad \varepsilon_j = \pm 1$

$$a_j \, l_j^2(x) = \varepsilon_j \left(\sqrt{|a_j|}\, l_j(x)\right)^2$$

si $a_j \neq 0$ on peut remplacer l_j par $\sqrt{|a_j|}\, l_j = l_j'$.

$$q(x) = \varepsilon_1 l_1'^2(x) + \dots + \varepsilon_r l_r'^2(x) \qquad \tilde{x}_j = l_j'(x)$$

matrice diagonale $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \varepsilon_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ coeff ± 1 ou 0

si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ $\quad a_j \, l_j^2(x) = (\sqrt{a_j}\, l_j(x))^2$ toujours possible

matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

<u>Thm</u> le nb^{r} de formes linéaires est

$r = \text{rang}(C)$ "rang de φ" ou "rang de q"

qui est indépendant de la base choisie.

<u>Lemme</u> $E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G \xrightarrow{w} H$

avec u, v, w linéaires

si u et w sont des isomorphismes

$\text{rang}(w \circ v \circ u) = \text{rang}(v)$

de façon équivalente $\text{rang}(ABC) = \text{rang}\, B$ si A et C inversible

Dém rang(v) = dim Im v = dim$(v(F))$
rang$(w\circ v\circ u)$ = dim $w\circ v\circ u(E)$
u isomorphisme $\Rightarrow u(E)=F$
donc $w\circ v\circ u(E) = w\circ v(u(E)) = w\circ v(F) = w(v(F))$
$w : v(F) \to w(v(F))$ bijectif donc
$$\begin{array}{ccc} v(F) & \to & w(v(F)) \\ \cap & & \cap \\ G & & H \end{array}$$
dim$(w(v(F)))$ = dim $v(F)$

- Changement de base $\tilde{C} = P^t C P$
P matrice de passage donc inversible
lemme $\Rightarrow$ rang $\tilde{C}$ = rang C.

Chap 3 Orthogonalité relativement à une forme quadratique

I Notion de vecteurs orthogonaux.

- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
On le suppose muni d'une forme quadratique $x \to q_x$
on lui associe $\varphi(x,y) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y))$

Def On dit que $x, y \in E$ sont orthogonaux (par rapport à φ) si $\varphi(x,y)=0$
et on écrit $x \perp_\varphi y$ (ou $x \perp y$)

Exemple $q=0$ $\varphi=0$ $\forall x,y\in E$ $x \perp_0 y$
ce n'est le produit que si $\varphi=0$

Def Soit F un s.e.v. de E. On définit

$$F^{\perp_\varphi} = \{y\in E;\ \forall x\in F\ \ \overset{x\perp y}{\varphi(x,y)=0}\}$$

Calcul de l'orthogonal $F^\perp$. On prend une base $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_p)$ de F

$x\in F \quad x=\lambda_1\varepsilon_1+\dots+\lambda_p\varepsilon_p \quad \lambda_j\in\mathbb{K}$

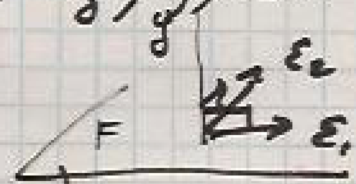
$x\perp y \iff \varphi(x,y)=0 \iff \lambda\varphi(\varepsilon_1,y)+\quad+\varphi(\varepsilon_p,y)=0$

$$F^\perp=\{y\in E;\ \varphi(\varepsilon_1,y)=\dots=\varphi(\varepsilon_p,y)=0\}$$

si $\varphi(\varepsilon_j,y)=0$ alors $\varphi(x,y)=0\ \forall x\in F$

si $\forall x\in F\ \varphi(x,y)=0 \Rightarrow \varphi(\varepsilon_j,y)=0$

Def $\operatorname{Ker}\varphi = E^\perp$



$\{y\in E;\ \forall x\in E\ \ \varphi(x,y)=0\}$

$(e_1,\dots,e_n)$ base de E

$$\varphi(x,y)=X^tCY \qquad X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\ Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

$C=\operatorname{Mat}_{(e_j)}(\varphi)$

$Y'=CY \quad X^tY'=x_1y_1'+\dots+x_ny_n'=0\ \forall X\in\mathbb{K}^n$

d'où $\Rightarrow y_1'=\dots=y_n'=0$

$\ker \varphi = \{ y$ de coordonnée Y tq $CY = 0\}$
noyau de $Y \mapsto CY$

23/02/2012

Espace euclidien

E muni de φ F.B.S. définie positive

<u>Notation fréquente</u> $\langle x, y \rangle = \varphi(x,y)$

ou $x \cdot y = \varphi(x,y)$

<u>Inégalité de Cauchy-Schwarz</u>

Soit φ une FBS semi-positive sur le $\mathbb{R}$ev E

Alors $|\varphi(x,y)| \leq \|x\| \|y\| = \sqrt{q(x)} \sqrt{q(y)}$

où $q(x) = \varphi(x,x)$

Dém Regardons

$P(\lambda) = q(\lambda x + y) = \varphi(\lambda x + y, \lambda x + y)$

$= \lambda^2 \varphi(x,x) + 2\lambda \varphi(x,y) + \varphi(y,y)$

$= \lambda^2 q(x) + 2\lambda \varphi(x,y) + q(y)$

$\boxed{(\text{écrit} = !)}$

1° cas Supposons $q(x) > 0$

On a $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $P(\lambda) \geq 0$

On ne peut avoir $\Delta > 0$, sinon le trinôme admet 2 racines distinctes $\lambda_1 < \lambda_2$ et $P(\lambda) < 0$ si $\lambda \in]\lambda_1, \lambda_2[$

seulement possible $\Delta \leq 0$ (racine double ou complexes)