Théorème (déjà vu!)

- tout espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ admet une base
- Toutes les bases ont le m nombre d'élément (fini ou infini)

$\dim_{\mathbb{K}} E = \operatorname{card}(I)$ pour une base $(v_i)_{i\in I}$ quelconque

11h17 $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ mais $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

27/01/2012 cours séché

~~02/02/2012~~

Soit $f : E \to F$ une application $\mathbb{K}$-linéaire

Def Noyau de f $\operatorname{Ker} f = \{x \in E ; f(x) = 0_F\}$
(www.kernel.org)

Image de f $\operatorname{Im} f = \{v = f(x) ; x \in E\}$

$\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E
$\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F

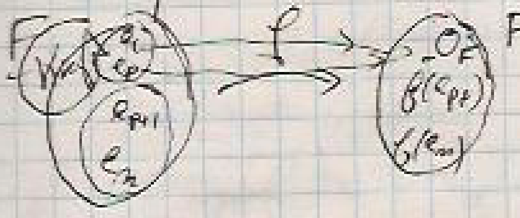
Théorème du rang Supposons $\dim_{\mathbb{K}} E$ finie alors $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont de dimension finie et

$$\boxed{\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f = \dim_{\mathbb{K}} E}$$

Dém. Ker $f \subset E$ de dim finie

on prend $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ base de Ker f

On complète en $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ base de E



Si on montre que $f(e_{p+1}), \dots, f(e_n)$ est une base de Im f

on aura $\left.\begin{array}{l} \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f = p \\ \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f = n - p \end{array}\right\} \; p + (n-p) = n = \dim_{\mathbb{K}} E$

Soit $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in E$

$v = f(x) = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n) = x_{p+1} f(e_{p+1}) + \dots + x_n f(e_n)$

Ceci implique que $\mathcal{G} = (f(e_{p+1}), \dots, f(e_n))$

famille génératrice de Im f

Montrons que $\mathcal{G}$ est libre

Supposons que la C. L. est nulle

$\iff f(x_{p+1} e_{p+1} + \dots + x_n e_n) = f(v) = 0$

$v = x_{p+1} e_{p+1} + \dots + x_n e_n$

$\iff v \in \operatorname{Ker} f \iff \exists (v_1, \dots, v_p) \; v = x_{p+1} e_{p+1} + \dots + x_n e_n = v_1 e_1 + \dots + v_p e_p$

$-v_1 e_1 - \dots - v_p e_p + x_{p+1} e_{p+1} + \dots + x_n e_n$

10407 $\Rightarrow v_1 = \dots = v_p = x_{p+1} = \dots = x_n = 0$

donc $\mathcal{G}$ est libre

Si $S = Vect(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est un supplémentaire de Ker(f)

$f|_S : S \to Im f$ isomorphisme linéaire

$e_{p+1} \to f(e_{p+1})$ $\dim Im(f) = \dim S = n - p$

10h10 $e_n \to f(e_n)$

<u>Def</u> $rang(f) = \dim_{\mathbb{K}} Im(f)$

$= \dim_{\mathbb{K}} S = \dim_{\mathbb{K}} E - \dim_{\mathbb{K}} Ker f$

$A = Mat_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f)$

$N = \dim F$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & & \\ a_{N1} & & a_{Nn} \end{pmatrix}$ $N \times n$

$\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ $f(\varepsilon_1)$ $f(\varepsilon_n)$

$Im f$ engendré par $(f(\varepsilon_1), \dots, f(\varepsilon_n))$

le rang le nombre de vecteurs indépendants que l'on peut extraire de cette famille génératrice.

10h17 <u>Notion d'espace dual</u>

<u>Def</u> On appelle <u>forme linéaire</u> ($\mathbb{K}$-linéaire) sur un e.v. E une application linéaire

$\varphi : E \to \mathbb{K}$ (espace d'arrivée le corps des scalaires)

(E est un $\mathbb{K}$-ev

<u>Notation</u> Espace dual $E^* = \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E; \mathbb{K})$

$\mathbb{K}=\mathbb{Q}$	$+$	0	1	$\times$	0	1
$\mathbb{K}=\mathbb{F}_2$	0	0	1	0	0	0
	1	1	0	1	0	1

digression

$\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base de E

(1) base de $\mathbb{K}$

$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},(1)}(\varphi) = (a_1, \ldots, a_n)$ matrice ligne

avec $a_i = \varphi(e_i) \in \mathbb{K}$

$x = \sum_{j=1}^{n} x_i e_i \qquad \varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = (a_1, \ldots, a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$= AX$

<u>Proposition</u> Si $\varphi \in E^*$, $\mathrm{Ker}\,\varphi$?

Si $\varphi = 0 \quad \mathrm{Ker}\,\varphi = E$

Si $\varphi \neq 0 \quad \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\,\varphi = n-1$ "hyperplan"

où $n = \dim_{\mathbb{K}} E$

Si $\varphi \neq 0$ alors $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathbb{K}$

Soit $v \in E$ $\varphi(v) \neq 0$ ~~vérif~~ $\varphi\left(\frac{\lambda}{\varphi(v)} v\right) = \frac{\lambda}{\varphi(v)} \varphi(v) = \lambda$

$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\,\varphi = \dim_{\mathbb{K}} E - \underbrace{\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im} f}_{=1} = n-1$

Calcul pratique

$\varphi(x) = a_1 x_1 + \cdots + a_j x_j + \cdots + a_n x_n \qquad a_j = \varphi(e_j) \in \mathbb{K}$

Si $\varphi \neq 0$, on a un coeff $a_j \neq 0$

$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x_j = -\frac{1}{a_j}\left(a_1 x_1 + \cdots + a_{j-1} x_{j-1} + a_{j+1} x_{j+1} + \cdots + a_n x_n\right)$

On fixe $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$ comme on veut, et on en déduit x_j dans $\mathbb{K}^{n-1}$

Base de $\operatorname{Ker} \varphi$

$$\begin{array}{cc} & \\ & \\ j & \\ & \\ & \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ -\frac{a_1}{a_j} & -\frac{a_2}{a_j} & \cdots & -\frac{a_n}{a_j} \\ & 0 & & 0 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \text{ ligne } j$$

$x_1 = 1 \quad x_2 = 1 \quad x_k = 1 \quad x_n = 1$

$k \neq j$

Etant donné une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E on introduit la forme linéaire dite j-ième coordonnée

$e_j^* : E \longrightarrow \mathbb{K}$

$x \mapsto e_j^*(x) = x_j$ dans $(e_1, \dots, e_n)$ j ième coordonnée

Si $\varphi \in E^*$ quelconque de matrice $A = (a_1, \dots, a_n)$

$\varphi(x) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = (a_1 e_1^* + \dots + a_n e_n^*)(x)$

$\varphi = a_1 e_1^* + \dots + a_n e_n^*$

<u>Théorème</u> $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ base de E^* (si $\dim_{\mathbb{K}} E$ fi

$\dim_{\mathbb{K}} E^* = \dim_{\mathbb{K}} E$

(faux en dimension infinie)

Dém On vient de voir que $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ famille génératrice

$$a_1 e_1^* + \cdots + a_n e_n^* = 0 \Rightarrow \quad a_j = 0$$
$$x = e_j$$
$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

<u>Notation</u> "Indice de Kronecker" $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

10h58 $$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \left(\delta_{ij}\right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

Chap. 2 Formes bilinéaires

~~Déf~~ Applications bilinéaires sur un corps $\mathbb{K}$

$$\varphi : E \times E' \longrightarrow F \qquad E, E', F \text{ e.v. sur } \mathbb{K}$$
$$(x, y) \mapsto \varphi(x, y)$$

~~Déf est ...~~ φ est $\mathbb{K}$-bilinéaire si elle est

- linéaire en x (à y fixé)

$\forall x_1, x_2 \in E \ \forall y \in E' \quad \varphi(x_1 + x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y)$

$\forall \lambda \in \mathbb{K} \ \forall x \in E \ \forall y \in E' \quad \varphi(\lambda x, y) = \lambda \varphi(x, y)$

- linéaire en y (à x fixé)

$\forall x \in E \ \forall y_1, y_2 \in E' \quad \varphi(x, y_1 + y_2) = \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2)$

$\forall \lambda \in \mathbb{K} \ \forall x \in E \ \forall y \in E' \quad \varphi(x, \lambda y) = \lambda \varphi(x, y)$

On peut "tout vérifier en m̂ temps"

$$\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2)$$

$$= \lambda_1 \mu_1 \varphi(x_1, y_1) + \lambda_1 \mu_2 \varphi(x_1, y_2) + \lambda_2 \mu_1 \varphi(x_2, y_1) + \lambda_2 \mu_2 \varphi(x_2, y_2)$$

$\forall \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}$ $\forall x_1, x_2 \in E$ $\forall y_1, y_2 \in E'$

Cas particulier (presque tout le temps ici) $E = E'$

<u>Def</u> On dit que $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ est

- symétrique $\forall x, y \in E$ $\varphi(y, x) = \varphi(x, y)$

11h
- antisymétrique $\forall x, y \in E$ $\varphi(y, x) = -\varphi(x, y)$

But généraliser le produit scalaire et la distance euclidienne

"<u>Formes</u> bilinéaires" espace d'arrivée $F = \mathbb{K}$

<u>Exemples</u> ① Produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$

$\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ~~$\varphi(x_1, \dots, x_n)$~~ $x = (x_1, \dots, x_n)$

$y = (y_1, \dots, y_n)$

$$\varphi(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = x \cdot y$$

C'est une forme bilinéaire symétrique

Norme euclidienne usuelle

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

② Produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad x \wedge y = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

C'est une application bilinéaire antisymétrique

③. $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 x_2 + 2 x_1 y_2$$

$$\varphi(\lambda(x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \lambda^2 x_1 x_2 + 2\lambda x_1 y_2$$

non linéaire en x (ni en y)

④ Exemple en dimension infinie

$E = C^0([a,b], \mathbb{R})$ fonctions continues $[a,b] \to \mathbb{R}$

$\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ $(f,g) \mapsto \varphi(f,g) = \int_a^b f(t) g(t)\, dt$ sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

C'est une forme bilinéaire symétrique sur E

④' $E = C^0([a,b], \mathbb{C})$

$f(t) = f_1(t) + i f_2(t)$ $\quad \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f_1(t)\,dt + i \int_a^b f_2(t)\,dt$

$(f,g) \mapsto \int_a^b f(t) g(t)\,dt$ est une forme bilinéaire sym. sur E sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$