26/01/2012 Algèbre bilinéaire et analyse de Fourier

Motivation

distance parcourue de $(x,y)$ à $(x+dx, y+dy)$ sur la carte $z=f(x,y)$

sur la carte $\sqrt{dx^2+dy^2}$

en vrai $\sqrt{dx^2+dy^2+(f'_x dx+f'_y dy)^2} = \sqrt{(1+f_x'^2)dx^2+2f'_x f'_y dx dy + (1+f_y'^2)dy^2}$

$(u,v)=(dx,dy)$ déplacement sur la carte

distance parcourue $\sqrt{q(u,v)}$ $\quad q(u,v)=au^2+bv^2+cuv$

Espace temps $(x,y,z,t)$

Forme quadratique de Lorentz $q(dx,dy,dz,dt)=dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2$

où $c$ est la vitesse de la lumière

---

10/03 Rappels et compléments d'algèbre linéaire

$\mathbb{K}$ = corps commutatif en général $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (possible $\mathbb{Q}$)

Déf un Espace vectoriel $E$ sur le corps $\mathbb{K}$ est

$(E,+,\cdot)$ avec $+$ associative, commutative, associative

élément neutre $0_E$

$\exists$ symétrique pour $+$ $\quad x+(-x)=(-x)+x=0_E$

propriétés de la loi de composition externe $\mathbb{K}\times E \to E$

$(\lambda,x)\mapsto \lambda\cdot x$

$1\cdot x = x \quad \forall x\in E$

$(\lambda\mu)\cdot x = \lambda\cdot(\mu\cdot x) \quad \forall \lambda,\mu\in\mathbb{K},\ x\in E$

$(\lambda+\mu)\cdot x = \lambda\cdot x+\mu\cdot x$ ———

$\lambda\cdot(x+y) = \lambda\cdot x+\lambda\cdot y \quad \forall\lambda\in\mathbb{K} \quad \forall x,y\in E$

Exemples

$\mathbb{K}^n = \{(x_1,\dots,x_n) \text{ où } x_i\in\mathbb{K}\}$ ensemble des $n$-uplets

$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$

$\lambda . (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$

$(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$

- Espace des polynômes

$\mathbb{K}[X]$ X indéterminée

$P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$, $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{K}$

$(\underbrace{\mathbb{K}[X], +, \cdot}_{e.v}, \times)$ algèbre des polynômes

mult des polynômes

- I intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$

$\mathcal{C}^0(I; \mathbb{R}) = \{ f : I \to \mathbb{K} \mid f \text{ continues} \}$

## II Propriétés fondamentales

Sous-espaces vectorels

$F \subset E$ s.e.v. si $F \neq \emptyset$ et

F stable par + et $\cdot$ de E

$\forall x, y \in F$ $x + y \in F$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ $\forall x \in F$ $\lambda x \in F$

on peut vérifier les deux propriétés en même temps

"stabilité" par combinaisons linéaires

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ $\forall x, y \in F$ $\lambda . x + \mu . y \in F$

les axiomes vrais dans E le sont dans F

Alors $(F, +, \cdot)$ est un espace vectoriel

10h19 celles de E restreintes à F

Exemples

$\mathcal{C}^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$ fonctions continues

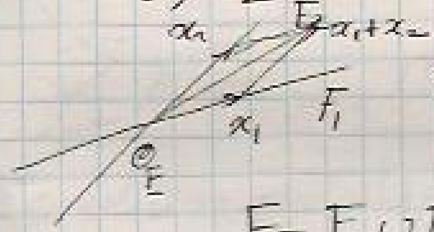
$\mathcal{C}^0(\mathbb{R};\mathbb{R}) \supset \mathcal{P}$ sous espace des fonctions polynômes

$$f(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j x^j \quad x\in\mathbb{R},\ a_j\in\mathbb{R}$$

$\mathcal{P}$ sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$

Contre-exemples

- $F_1,\ F_2$ s.e.v. $\not\Rightarrow F_1\cup F_2$ s.e.v

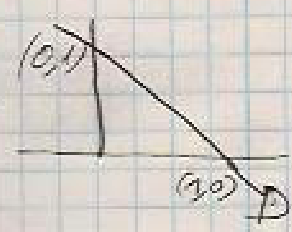



$F_1, F_2$ droites vectorielles distinctes dans un plan vectoriel

$F=F_1\cup F_2$ n'est pas stable par $+$

$0\neq x_1\in F_1,\ 0\neq x_2\in F_2 \quad x_1+x_2\notin F_1\cup F_2$

Dans $\mathbb{R}^2$ la droite d'équation $x+y=1$




Remarque essentielle $F$ s.e.v. $\Rightarrow 0_E\in F$

$F\neq\emptyset \Rightarrow \exists x\in F \quad 0_E = 0\cdot x$

Théorème $F_1, F_2$ s.e.v. $\Rightarrow F_1\cap F_2$ s.e.v.

Plus généralement, soit $(F_i)_{i\in I}$ famille de s.e.v. de E

une famille est une collection indexée par un ensemble I

I est fini ou infini

$$F=\bigcap_{i\in I} F_i = \{x\in E;\ \forall i\in I, x\in F_i\}$$

$0_E \in F_i, \forall i \Rightarrow 0_E \in F$ et $F \neq \emptyset$

$x, y \in F \Rightarrow \forall i \in I,\ x, y \in F_i \Rightarrow \forall i \in I\ x+y \in F_i \Rightarrow x+y \in F$

de même $F = \bigcap_{i \in I} F_i$ stable par $\cdot$

10h33 Famille (ou système) de vecteurs dans l'e.v. E sur $\mathbb{K}$

$$\mathcal{S} = (s_i)_{i \in I} \quad s_i \in E$$

Combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{S}$

$$\sum_{i \in I} \lambda_i s_i \qquad \lambda_i \in \mathbb{K}$$

à condition que $\lambda_i = 0$ sauf un nombre fini

$(\lambda_i)_{i \in I}$ famille presque nulle de coefficients

$$F = \left\{ \text{C.L. } \sum_{i \in I} \lambda_i s_i,\ (\lambda_i) \text{ presque nulle quelconques}, \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$$

F est stable pour + et $\cdot$

$F \ni s_i \quad s_i = 1 \cdot s_i + 0 \cdot s_j \quad j \neq i$

donc F est le plus petit sous-espace vectoriel qui contient ~~les~~ vecteurs $(s_i)_{i \in I}$

Notation $\quad \mathrm{Vect}(\mathcal{S}) = \mathrm{Vect}(s_i)_{i \in I}$

$$= \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i s_i,\ (\lambda_i) \text{ presque nulle} \right\}$$

10.4.1 Déf On dit que $S$ est une famille génératrice de l'e.v. $E$ si $Vect(S) = E$, c'est à dire tout vecteur de $E$ ~~est combi~~ peut s'écrire $x = \sum_{i \in I} \lambda_i s_i$ pour certains $(\lambda_i)$ presque tous nuls

<u>Exemple</u> $E = \mathbb{K}[X]$

$S = (1, X, X^2, \dots, X^n \dots) = (X^i)_{i \in \mathbb{N}}$
est une famille génératrice (par définition des polynômes)

s.e.v. $F_n = \mathbb{K}[X]_n = \{\text{polynômes de degré} \leq n\}$

$P_0(X) = a_{00}$ degré 0 $(a_{00} \neq 0)$
$P_1(X) = a_{10} + a_{11} X$ de degré 1 $(a_{11} \neq 0)$
$\vdots$
$P_n(X) = a_{n0} + \dots + a_{nn} X^n$ de degré $n$ $(a_{nn} \neq 0)$

Alors $(P_0, \dots, P_n)$ famille génératrice de $\mathbb{K}[X]_n$

Récurrence sur $n$
si $n = 0$ $\mathbb{K}[X]_0 = \{\text{constantes}\} \simeq \mathbb{K}$
engendré par $P_0 = a_{00} \neq 0$
$c = \frac{c}{a_{00}} a_{00}$

supposons vrai pour $n-1$

$$Q(X) = a_{n0} + \dots + a_{n,n-1} X^{n-1} \in \mathbb{K}[X]_{n-1}$$

$$= \lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_{n-1} P_{n-1}$$

hyp de Réc.

donc $X^n = \frac{1}{a_{nn}} \left( P_n(X) - Q(X) \right) = -\frac{\lambda_0}{a_{nn}} P_0 + \dots - \frac{\lambda_{n-1}}{a_{nn}} P_{n-1} + \frac{1}{a_{nn}} P_n$

est combinaison linéaire de $P_0, \dots, P_n$

par hypothèse de récurrence $1, X, \dots X^{n-1}$ sont comb lin de $P_0 \dots P_{n-1}$

et tout polynôme de degré $\leq n$ est combinaison linéaire de $P_0, \dots, P_n$ $\square$

<u>Affirmation</u>

si $P = \lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_n P_n$

alors les coefficients sont uniques

(coeff de $X^n$ dans $P$) $= \lambda_n$ (coeff de $X^n$ dans $P_n$) $= \lambda_n a_{nn}$

donc $\lambda_n = \frac{1}{a_{nn}}$ (coeff de $X^n$ dans $P$)

$\underbrace{P - \lambda_n P_n}_{\text{de deg} \leq n-1} = \lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_{n-1} P_{n-1}$

11h par récurrence descendante sur $n$ le choix des $\lambda_i$ est unique.

<u>Def</u> $\mathcal{S} = (s_i)_{i \in I}$ est dite libre si l'une des trois propriétés équivalentes suivantes est satisfaite

① $\sum_{i\in I} \lambda_i s_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in I \ \lambda_i = 0$

② unicité des coeff. $\sum_{i\in I} \lambda_i s_i = \sum_{i\in I} \mu_i s_i \Rightarrow \forall i \in I \ \lambda_i = \mu_i$

③ aucun des $s_i$ n'est combinaison linéaire des autres

$$\sum_{i \neq j \in I} \lambda_j s_j$$

On dit que $(s_i)$ sont $\mathbb{K}$ linéairement indépendants

Attention $E = \mathbb{C}$ e.v. sur $\mathbb{C}$, engendré par 1

e.v. sur $\mathbb{R}$ $\quad z = x + yi = x.1 + y.i$ engendré par $(1, i)$

$(1, i)$ $\mathbb{R}$-linéairement indépendants

mais non $\mathbb{C}$-linéairement indépendants $i.1 + (-1)i = 0$

équivalence des trois propriétés laissé en exercice.

Def on appelle base (sur $\mathbb{K}$) de l'e.v. E une famille

$\mathcal{S} = (s_i)_{i\in I}$ à la fois génératrice et libre

$(s_i)_{i\in I}$ est une base $\Leftrightarrow \forall x \in E$ on peut écrire

$x = \sum_{i\in I} x_i s_i$, $x_i \in \mathbb{K}$

avec une famille $(x_i)_{i\in I}$ unique

par exemple $\mathbb{K}[X]$ admet comme base n'importe quelle suite $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tq $\deg P_i = i$

$P_i$ de degré $i$

Théorème (déjà vu!)

- tout espace vectoriel $E$ sur $\mathbb{K}$ admet une base
- Toutes les bases ont le m nombre d'élément (fini ou infini)

$\dim_{\mathbb{K}} E = \operatorname{card}(I)$ pour une base $(s_i)_{i \in I}$ quelconque

11h17 $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ mais $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

27/01/2012 cours séché

---

~~02/02/2012~~

Soit $f : E \to F$ une application $\mathbb{K}$ linéaire

Def Noyau de $f$ $\operatorname{Ker} f = \{x\, E \,;\, f(x) = 0_F\}$
(www.kernel.org)

Image de $f$ $\operatorname{Im} f = \{v = f(x) \,;\, x \in E\}$

- $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de $E$

$\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de $F$

Théorème du rang Supposons $\dim_{\mathbb{K}} E$ finie alors $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont de dimension finie et

$$\boxed{\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f = \dim_{\mathbb{K}} E}$$