Examen du 23 mai 2012

pas de document, pas de calculatrice

durée : 2h

Exercice 1. Soit A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note φ la forme bilinéaire et q la forme quadratique associées à A dans la base canonique.

1. Si on note $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^3$, expliciter $\varphi(x, y)$ et $q(x)$.
   réponse :
$$\varphi(x, y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + y_1x_2 + 3x_1y_3 + 3y_1x_3 + 4x_2y_2 + x_2y_3 + y_2x_3 + 2x_3y_3.$$

2. Appliquer l'algorithme de Gauss pour effectuer une décomposition de q en somme de carrés de formes linéaires.
   réponse :
$$\begin{aligned}
q(x) &= 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2 \\
&= 2(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3)^2 - 2(\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3)^2 + 4x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2 \\
&= 2(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3)^2 - (\frac{1}{2}x_2^2 + \frac{9}{2}x_3^2 + 3x_2x_3) + 4x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2 \\
&= 2(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3)^2 + \frac{7}{2}x_2^2 - \frac{5}{2}x_3^2 - x_2x_3 \\
&= 2(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3)^2 + \frac{7}{2}(x_2^2 - \frac{2}{7}x_2x_3) - \frac{5}{2}x_3^2 \\
&= 2(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3)^2 + \frac{7}{2}(x_2 - \frac{1}{7}x_3)^2 - \frac{7}{2}\frac{1}{7^2}x_3^2 - \frac{5}{2}x_3^2 \\
&= 2(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3)^2 + \frac{7}{2}(x_2 - \frac{1}{7}x_3)^2 - \frac{18}{7}x_3^2
\end{aligned}$$

3. Donner le rang et la signature de q.
   réponse : On déduit du calcul précedent que le rang de q vaut 3 (car les formes linéaires sont linéairement indépendantes) et que sa signature est (2,1).

4. Montrer que $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A. Trouver une base orthonormée pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de A. Donner la liste des valeurs propres de A.

   réponse : on calcule facilement que $AU = 6U$ donc U est vecteur propre de A. Si on calcule le polynôme caractéristique de la matrice on trouve :

$$\begin{vmatrix} 2-x & 1 & 3 \\ 1 & 4-x & 1 \\ 3 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = (2-x)((4-x)(2-x)-1)-1(2-x-3)+3(1-3(4-x))$$
$$= (2-x)(x^2-6x+7)+(x+1)+3(3x-11)$$
$$= (-x^3+8x^2-9x-18)$$

Or on peut factoriser $(x-6)$:

$$\begin{aligned} \det(A-xI) &= -(x-6)(x^2-2x-3) \\ &= -(x-6)(x+1)(x-3) \end{aligned}$$

Les valeurs propres sont donc -1, 3 et 6. Un vecteur propre associé à la valeur propre 6 est U. On cherche maintenant un vecteur propre V associé à -1 qui doit donc vérifier $(A+I)V=0$ donc un vecteur du noyau de la matrice

$$A+I = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

qui a manifestement pour élément du noyau $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On cherche aussi un vecteur propre W associé à la valeur propre 3 donc un élément du noyau de la matrice

$$A-3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

qui a manifestement pour élément du noyau $W = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$|U| = \sqrt{3}$, $|V| = \sqrt{2}$ et $|W| = \sqrt{6}$ donc $(U/\sqrt{3}, V/\sqrt{2}, W/\sqrt{6})$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ qui est une base de vecteurs propres de A.

5. Donner une nouvelle décomposition de q en somme de carrés de formes linéaires.
   réponse : On peut représenter q en utilisant la base $(U/\sqrt{3}, V/\sqrt{2}, W/\sqrt{6})$. Si on note (x'_1, x'_2, x'_3) les coordonnées dans cette base alors q s'écrit : $6(x'_1)^2-(x'_2)^2+3(x'_3)^2$. Ne reste plus qu'à exprimer ces coordonnées en fonctions des coordonnées de départ (x_1, x_2, x_3). On montre facilement que

$$\begin{cases} x_1 = \frac{x'_1}{\sqrt{3}} + \frac{x'_2}{\sqrt{2}} + \frac{x'_3}{\sqrt{6}} \\ x_2 = \frac{x'_1}{\sqrt{3}} - 2\frac{x'_3}{\sqrt{6}} \\ x_3 = \frac{x'_1}{\sqrt{3}} - \frac{x'_2}{\sqrt{2}} + \frac{x'_3}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

ce qui entraine en inversant le système :

$$\begin{cases} x'_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1+x_2+x_3) \\ x'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-x_3) \\ x'_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(x_1-2x_2+x_3) \end{cases}$$

qui est très facile à calculer car la matrice des vecteurs propres est unitaire donc son inverse est sa transposée. Donc

$$q(x) = 2(x_1 + x_2 + x_3)^2 - \frac{1}{2}(x_1 - x_3)^2 + \frac{1}{2}(x_1 - 2x_2 + x_3)^2.$$

6. Quelle est la nature de la quadrique $q(x) = 1$?
réponse : comme la signature est (2,1) on peut en déduire qu'il s'agit d'un hyperboloïde à une nappe.

Exercice 2. 1. Définir les coefficients de Fourier $a_n(g)$, $b_n(g)$ et $c_n(g)$ de g une fonction 2π-périodique continue par morceaux.
réponse : Les coefficients de Fourier sont définis par les formules suivantes :

$$a_0(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\,dt \qquad a_n(g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(nt)g(t)\,dt \text{ (for n } \geq 1)$$

$$b_n(g)\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(nt)g(t)\,dt \text{ (for n } \geq 1) \qquad c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\mathrm{e}^{-int}\,dt \text{ (for n } \in \mathbb{Z})$$

2. On définit la fonction f par $f(t) = |\sin(t)|$.
   (a) Tracer le graphe de f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

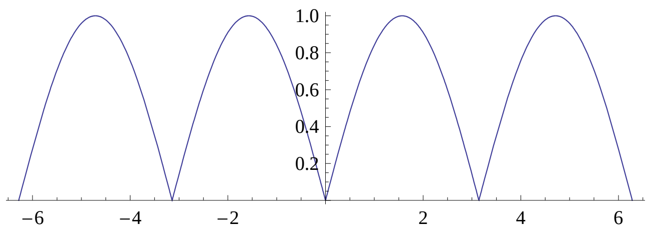

FIGURE 1 – Graphe de la fonction $x \mapsto |\sin(x)|$

   (b) Calculer $a_n(f)$ et $b_n(f)$.
   réponse : on peut appliquer directement la formule au dessus.

$$\begin{aligned} a_0(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\sin(t)|\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)\,dt = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

et si $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |\sin(t)|\cos(nt)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin(t)|\cos(nt)\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)\cos(nt)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\sin(t+nt)+\sin(t-nt))\,dt \\
&= \begin{cases} 0 \text{ si } n=1 \\ \frac{1}{\pi}[-\frac{\cos(t+nt)}{n+1}+\frac{\cos(nt-t)}{n-1}]_0^{\pi} \text{ si } n \geq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 \text{ si } n=1 \\ \frac{1}{\pi}[(-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}+\frac{(-1)^{n-1}}{n-1})-(-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1})] \text{ si } n \geq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ impair} \\ -\dfrac{4}{\pi}\dfrac{1}{n^2-1} \text{ si } n \text{ pair} \end{cases}
\end{aligned}$$

et $b_n(f) = 0$ car la fonction f est paire.

(c) Montrer, en énonçant les théorèmes auxquels vous faites référence, que f est égale à sa série de Fourier.
réponse : f est continue, C^1 par morceaux et périodique donc d'après le théorème de Dirichlet, elle est limite (uniforme) de sa série de Fourier.

(d) En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.
réponse :

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0(f) + \sum_{n\geq 1 \text{ pair}} a_n(f)\cos(nx) \\
&= \frac{2}{\pi} + \sum_{n\geq 1} a_{2n}(f)\cos(2nx) \\
&= \frac{2}{\pi} - \sum_{n\geq 1} \frac{4}{\pi}\frac{1}{(2n)^2-1}\cos(2nx) \\
&= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2-1}\cos(2nx)
\end{aligned}$$

donc $0 = f(0) = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{4n^2-1}\cos(0)$ ce qui implique que

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$$

(e) Calculer $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)^2\,dt$. Après avoir énoncé l'identité de Parseval-Bessel, calculer la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}$.
réponse : $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)^2\,dt$ est égale à la valeur moyenne de $\sin^2$ qui vaut $\frac{1}{2}$. Or

l'identité de Parseval-Bessel, que vérifie f est :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2\,dt = a_0(f)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} a_n(f)^2 + b_n(f)^2$$

donc on a :

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}(\frac{4}{\pi}\frac{1}{4n^2-1})^2$$

ce qui permet de conclure que

$$\sum_{n\geq 1}(\frac{1}{4n^2-1})^2 = \frac{\pi^2-8}{16}.$$

Par la suite on traitera AU CHOIX l'exercice 3 OU l'exercice 4.

Exercice 3. Donner la nature de la quadrique d'équation

$$4x^2 + 9y^2 + 12xy + z^2 + 5x - 7y + 1 = 0.$$

Justifier votre réponse de façon précise.

réponse : $4x^2 + 9y^2 + 12xy + z^2 + 5x - 7y + 1 = (2x + 3y)^2 + z^2 - (5x - 7y) + 1$ donc si on pose $x' = 2x + 3y$, $z' = z$ et $y' = 5x - 7y$ alors la quadrique s'écrit : $x'^2 + z'^2 - y' = 1$ qui est un paraboloïde. Les changements de coordonnées sont correctes car inversibles : la matrice (de changement de base)

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible car de déterminant -29.

Exercice 4. Trouver, en utilisant les séries de Fourier, l'évolution de la température T dans un barreau métallique de longueur L, qu'on paramètre par x entre $-\frac{L}{2}$ et $\frac{L}{2}$, avec comme conditions initiales $T(x, 0) = 0$ pour $|x| < \frac{L}{4}$ et $T(x, 0) = 100$ pour $\frac{L}{4} < |x| < \frac{L}{2}$, sans flux de chaleur aux extrémités. L'équation de la chaleur associée, avec les conditions initiales, est :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial T}{\partial x}(-\frac{L}{2}, t) = \frac{\partial T}{\partial x}(\frac{L}{2}, t) = 0,$$

$$T(x,0) = \begin{cases} 0 \text{ si } |x| < \frac{L}{4}, \\ \\ 100 \text{ si } \frac{L}{4} < |x| < \frac{L}{2}. \end{cases}$$

On ne demande pas ici de justifier de certaines permutations telle que celle de la dérivation et du signe somme. Ce qui nous intéresse c'est que vous montriez que vous avez compris la démarche de Fourier et que vous savez calculer la solution sans forcément justifier tout les détails de la preuve.

réponse : L'idée de la preuve s'appuie très fortement sur un fait simple : l'équation aux dérivée partielle que nous considérons (l'équation de la chaleur) est linéaire. Donc si deux fonctions sont solutions de cette équations, n'importe quelle combinaison de ces deux fonctions est aussi solution.
D'autre part, les solutions de la forme $(t, x) \mapsto f(t)g(x)$ sont de la forme $a\cos(\alpha x)\mathrm{e}^{-\alpha^2 Dt}$ et $b\sin(\alpha x)\mathrm{e}^{-\alpha^2 Dt}$. Comme la condition initiale est une fonction paire en x, on ne va considérer

que les cosinus et comme la dérivée doit être nulle en $-L/2$ et $L/2$, on ne pourra considérer que les α tel que $\alpha L/2 \in \pi\mathbb{Z}$. Donc on ne va prendre en compte que les combinaisons (finies ou infinies) des fonctions $\cos(\frac{2n\pi}{L}x)\mathrm{e}^{-\frac{4n^2\pi^2}{L^2}Dt}$. Donc la solution sera de la forme :

$$T : (x,t) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\frac{2n\pi}{L}x)\mathrm{e}^{-\frac{4n^2\pi^2}{L^2}Dt}$$

où les a_n sont choisis de façon à ce que à $t = 0$:

$$T(x,0) = \begin{cases} 0 \text{ si } |x| < \frac{L}{4}, \\ \\ 100 \text{ si } \frac{L}{4} < |x| < \frac{L}{2}. \end{cases}$$

c'est à dire :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\frac{2n\pi}{L}x) &= 0 \text{ (si } |x| < L/4) \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\frac{2n\pi}{L}x) &= 100 \text{ (si } L/4 < |x| < L/2) \end{aligned}$$

Les a_n sont donc les coefficients de Fourier de la fonction $x \mapsto T(x,0)$ qui est T périodique :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L}\int_{-L/2} L/2T(x,0)\,dx \\ &= \frac{2}{L}\int_{L/4}^{L/2} 100\,dx \\ &= 50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} T(x,0)\cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)\,dx \\ &= \frac{2}{L}\int_{L/4}^{L/2} 100\cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)\,dx \\ &= \frac{100}{n\pi}\left[\sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)\right]_{x=L/4}^{x=L/2} \\ &= -\frac{100}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ &= \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est pair,} \\ -(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{100}{n\pi} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc la solution est de la forme :

$$T(x,t) = 50 + \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^{n+1}\frac{100}{(2n+1)\pi}\cos\left(\frac{2(2n+1)\pi}{L}x\right)\mathrm{e}^{-\frac{4(2n+1)^2\pi^2}{L^2}Dt}.$$

Bien sûr, dans cette "démonstration avec les mains", on n'a pas justifié le caractère dérivable de la solution c'est à dire la possibilité de passer des sommes finies aux sommes infinies.