Exercice 1. Démontrer qu'est un produit scalaire chaque application φ de la liste suivante :

1. Si $s \in C([a,b],]0,+\infty[)$, $\quad \varphi : C([a,b],\mathbb{R}) \times C([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ \varphi(f,g) = \int_a^b s(x)f(x)g(x)\,dx$
2. $\varphi : \mathbb{R}[X]_n \times \mathbb{R}[X]_n,\ (P,Q) \mapsto \sum_{i=0}^{n} P(a_i)Q(a_i) \in \mathbb{R}$ où $a_0,\ldots,a_n$ sont des réels distincts.
3. $\varphi : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, (M,N) \mapsto \mathrm{Tr}(M^t N)$.

Exercice 2. Déterminer si les applications suivantes sont des produits scalaires.

1. $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \varphi((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 9x_3y_3$
2. $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \varphi((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3$
3. $\varphi : \mathbb{R}[X]_n \times \mathbb{R}[X]_n,\ (P,Q) \mapsto \sum_{i=1}^{n} P(a_i)Q(a_i) \in \mathbb{R}$ où $a_1,\ldots,a_n$ sont des réels distincts.
4. $\varphi : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\ (M,N) \mapsto \mathrm{Tr}(MN) \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. Soit $E, x \mapsto \|x\|^2 = \langle x,x \rangle$ un espace (vectoriel réel) euclidien et $x,y \in E$.

1. Expliciter la forme quadratique $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ q(t_1,t_2) = \|t_1 \cdot x + t_2 \cdot y\|^2$.
2. Prouver que q est semi-positive et déterminer son noyau.
3. En déduire que q est définie positive si et seulement si x et y sont linéairement indépendants.
4. Par la méthode de Gauss pour q en donner une preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 4. Soit $E, x \mapsto \|x\|^2 = \langle x,x \rangle$ un espace (vectoriel réel) euclidien et $v \in E, v \neq 0$. On considère l'application : $s_v : E \to E,\ x \mapsto x - 2\frac{\langle v,x \rangle}{\langle v,v \rangle} \cdot v$

1. Déterminer le carré $s_v \circ s_v$ de s_v.
2. Prouver que s_v conserve le produit scalaire : pour tout $x,y \in E$ on a $\langle x,y \rangle = \langle s_v(x), s_v(y) \rangle$.
3. Déterminer les valeurs et vecteurs propres de s_v.
4. En déduire que $s_v = \sigma_{(\mathbb{R}v)^\perp}$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $(\mathbb{R}v)^\perp$ orthogonal à la droite portée par le vecteur v.
5. En considérant une base orthonormée de E contenant le vecteur $\frac{1}{\|v\|} \cdot v$, prouver directement que la symétrie orthogonale $\sigma_{(\mathbb{R}v)^\perp}$ conserve le produit scalaire.

Exercice 5. Les fonctions suivantes sont elles : des formes sesquilinéaire, si oui, hermitiennes ?

1. $\varphi : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}, \quad \varphi((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = \overline{x}_1 y_3 + \overline{x}_2 + y_1 y_2$
2. $b, b' : \mathbb{C}[X]_n \times \mathbb{C}[X]_n \to \mathbb{C},\ b(P,Q) = P'(1)\overline{Q(0)} + \overline{Q'(1)}P(0),\ b'(P,Q) = Q'(1)\overline{P(0)} + \overline{P'(1)}Q(0)$.
3. $\varphi, \varphi' : C([a,b],\mathbb{C}) \times C([a,b],\mathbb{C}) \to \mathbb{C}, \quad \varphi(f,g) = \int_a^b \overline{f(x)}g(x)dx,\ \varphi'(f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$.

Exercice 6. Appliquer la méthode de Gauss pour décomposer en carrés de modules de formes linéairement indépendantes les formes quadratiques hermitiennes :

1. $h : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C},\ h(z) = \overline{z_1}z_1 + \overline{z_1}z_2 + \overline{z_2}z_1 + 2\overline{z_2}z_2$
2. $h : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C},\ h(z) = \overline{z_1}z_2 + \overline{z_2}z_1$
3. $h : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C},\ h(z) = \overline{z_1}z_1 + \overline{z_1}z_2 + \overline{z_2}z_1 + +\overline{z_1}z_3 + \overline{z_3}z_1 + 2\overline{z_2}z_2 - 4\overline{z_3}z_3$

Exercice 7. En modifiant l'**Exercice 3** pour une forme hermitienne définie positive donner une preuve directe[1] l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas hermitien.

1. c'est-à-dire sans se ramener à l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas euclidien.

Exercice 8. Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $h : V \times V \to \mathbb{C}$ une forme sesquilinéaire hermitienne. Montrer les relations suivantes :

(1) $h(x-iy, x-iy) - h(x,x) - h(y,y) = 2\,\mathrm{Im}\, h(x,y)$

(2) $h(x+y, x+y) - h(x-y, x-y) = 4\,\mathrm{Re}\, h(x,y)$

(3) $h(x-iy, x-iy) - h(x+iy, x+iy) = 4\,\mathrm{Im}\, h(x,y)$.

Exercice 9. Pour chaque forme quadratique q de la liste, on appelle b sa forme polaire.

a) Appliquer à q la réduction de Gauss.

b) En déduire la signature, le rang de q et une base b-orthogonale.

1. $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \ q(x,y) = x^2 + xy + 3y^2$,
2. $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \ q(x,y) = xy$,
3. $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \ q(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + xz + yx$,
4. $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \ q(x,y,z) = xy - yz$,
5. $q : \mathbb{R}[X]_2 \to \mathbb{R},\ \ q(P) = P(1)P(2) + P(1)P(0)$.

Exercice 10. Utiliser la méthode de Gram-Schmidt pour orthonormaliser dans $\mathbb{R}^3$ avec son produit scalaire usuel la base $e_1 = (1,1,-1)$, $e_2 = (1,-1,1)$ et $e_3 = (-1,1,1)$.

Exercice 11. Pour chacun des espaces V munis du produit scalaire ϕ et famille $\mathcal{F}$ ci-dessous :

a) Produire une base orthonormée pour le sous-espace W engendré par $\mathcal{F}$.

b) Calculer la projection orthogonale de $v \in V$ sur W.

1. $V = \mathbb{R}^3$, $\phi = \langle , \rangle$ le produit scalaire usuel, $\mathcal{F} = ((1,0,-1),(1,-1,0)), v = (1,1,1)$.
2. $V = \mathbb{R}^4$, $\phi = \langle , \rangle$, $\mathcal{F} = (u_1,u_2,u_3) = ((1,1,0,0),(1,0,-1,1),(0,1,1,1)), v = (1,1,1,1)$.
3. $V = \mathbb{R}^3$, $\varphi(x,y) = 3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2 + 3x_3y_3$, $\mathcal{F} = ((1,0,0),(0,1,0)$, $v = (0,0,1)$.
4. $V = \mathbb{R}[X]_3$, $\phi(P,Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$, $\mathcal{F} = (1, X, X^2)$, $v = X^3$.

Exercice 12. Soit $C([-1,1],\mathbb{R})$ (l'espace des fonctions continues à valeurs réelles définies sur l'intervalle $[-1,1]$) muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

1. Utiliser la méthode de Gram-Schmidt afin de produire une base orthonormée pour le sous-espace $\mathbb{R}[X]_2 \subset C([-1,1],\mathbb{R})$.
2. Trouver des réels a,b,c tels que l'intégrale $\int_{-1}^{1}(e^x - ax^2 - bx - c)^2\,dx$ soit minimale.

Exercice 13. Soit $\mathbb{R}[X]_2$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à deux, on considère sur $\mathbb{R}[X]_2$ l'application Δ qui à un polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c$ associe son discriminant $\Delta(P) = b^2 - 4ac$.

1. Montrer Δ est une forme quadratique et donner sa forme polaire.
2. Donner la matrice de la forme polaire b dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2)$.
3. Montrer que pour tout polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c$ de $\mathbb{R}[X]_2$, on peut écrire :
$$\Delta(P) = b^2 + (a-c)^2 - (a+c)^2.$$
4. Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{B}_1 = (\frac{1}{2}(X^2-1), X, \frac{1}{2}(X^2+1))$ est une base de $\mathbb{R}[X]_2$.
5. Donner la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}_1$.
6. Donner les coordonnées du polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c$ dans la base $\mathcal{B}_1$.
7. Donner la matrice de la forme polaire b dans la base $\mathcal{B}_1$.
8. Exprimer $\Delta(P)$ en fonction des coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}_1$.
9. Donner le rang et la signature de Δ.