Exercice 1. Soit $w = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, w \neq 0$ fixé et l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = ax + by + cz.$$

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(u, v) = f(u \wedge v)$.
Montrer que φ est bilinéaire et calculer sa matrice représentative dans la base canonique.

Exercice 2. Soit E, F, G, H quatre espaces vectoriels de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ et trois applications linéaires $u : E \to F,\ v : F \to G,\ w : G \to H$.

1. Question de cours : Prouver que si u et w sont des isomorphismes :

$$\mathrm{rang}\,(w \circ v \circ u) = \mathrm{rang}\,(v)$$

2. Ce résultat a-t-il encore lieu si si seulement u est surjective et w injective ?
3. Prouver que sans rien supposer sur u et v on a toujours $\mathrm{rang}\,(w \circ v \circ u) \leq \mathrm{rang}\,(v)$.
4. Donner des contre-exemples à l'assertion de 1. dans chacun des trois autres cas [1] d'attribution des qualificatifs « injectif », « surjectif » à u et w.

Exercice 3. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices $n \times n$. Montrer que si pour tous vecteurs colonnes à n composantes réelles X, Y on a ${}^tXAY = {}^tXBY$, alors $A = B$.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et une forme bilinéaire $\psi : E \times E \to \mathbb{K}$.

1. Définir ce que sont la *forme quadratique associée à* ψ, puis une *forme quadratique sur* E et sa *forme polaire* φ et pour la forme quadratique associée à ψ, exprimer φ en fonction de ψ.
2. En notant $(x, y) \in \mathbb{R}^2 = E$, pour chacune des expressions suivantes :

$$q(x, y) = 3x^2 - 10xy + 19y^2 + 2x + 3y, \quad q'(x, y) = 3x^2 - 10xy + 19y^2$$

$$q''(x, y) = x^3 + 3x^2 - 10xy + 19y^2, \quad q'''(x, y) = -10xy$$

déterminer si elle défint une forme quadratique sur E, et si oui déterminer sa forme polaire.

Exercice 5. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^2$ par $q(x, y) = 3x^2 - 10xy + 19y^2$.

1. Donner une décomposition q en carrés de formes linéaires indépendantes.
2. En déduire une base orthogonale pour la forme polaire de q.
3. Traduire matriciellement vos résultats.
4. Vérifierez vos résultats de 1. et 2. par deux calculs matriciels.

Exercice 6. Dans le cas $E = \mathbb{R}^3$, reprendre l'Exercice précédent avec les forme quadratiques :

1. de forme polaire $\varphi(x, y) = 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2$
2. donnée par $q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz$.

Exercice 7. Sur $E = \mathbb{R}^2$ on considère les formes linéaires $l_1, l_2 \in E^*$, $l_1(x) = 2x_1 + x_2$, $l_2(x) = x_1 + x_2$ et la forme quadratique $q(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_2)^2 = l_1(x)^2 + l_2(x)^2$.

1. Les formes l_1 et l_2 sont elles linéairement indépendantes ?
2. Donner la matrice dans la base canonique $((1, 0), (0, 1))$ de $\mathbb{R}^2$ de la forme polaire φ de q.
3. $q(x) = l_1(x)^2 + l_2(x)^2$ est-elle une décomposition de q en carrés de formes linéaire indépendantes ?
4. Donner une base de E orthogonale pour la forme polaire φ.
5. $q(x) = l_1(x)^2 + l_2(x)^2$ est-elle une telle décomposition obtenue par la méthode de Gauss ?
6. Appliquer la méthode de Gauss à q, en déduire une autre base orthogonale pour φ.

---

1. u injectif et w injectif, u injectif et w surjectif, u surjectif et w surjectif.

Exercice 8. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$, et sur $\mathbb{R}^2$ la forme quadratique $q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$.

1. Ecrire la matrice dans la base canonique de la forme polaire de q et calculer son déterminant.
2. En supposant $a \neq 0$ [resp. $c \neq 0$], par la méthode de Gauss décomposer q en carrés de formes linéaires indépendantes : $q(x) = al_1(x)^2 + Cl_2(x)^2$ [resp. $q(x) = Am_1(x)^2 + cm_2(x)^2$)].
3. Expliquer pourquoi $l_1(x) = x_1 + \beta x_2,\ l_2(x) = x_2$ [resp. $m_2 = \alpha x_1 + x_2,\ m_1(x) = x_1$].
4. Quelle est la matrice de passage de la base duale (e_1^*, e_2^*) de la base canonique à la base (l_1, l_2) [resp. (m_1, m_2)] de $(\mathbb{R}^2)^*$. Calculer les déterminants de ces deux matrices de passage.
5. En déduire que C [resp. A] peuvent se déterminer avant le calcul de l_1 [resp. m_2].
6. A quelle condition la forme q a des valeurs des trois signes $\{-, 0, +\}$?
7. Comparez ce qui précède avec l'étude des signes des valeurs du trinôme [2] $P(t) = at^2 + 2bt + c$.

Exercice 9. Soit $\mathcal{M} = \left(m_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, m_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, m_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, m_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ la base canonique de $M_2(\mathbb{K})$ et la forme quadratique déterminant $q : M_2(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, q(M) = |M|$.

1. Donner la matrice de sa forme polaire φ dans la base $\mathcal{M}$, en déduire que φ est non dégénérée.
2. Donner une décomposition de q en carrés de formes linéaires indépendantes.
3. En déduire une base $\mathcal{O} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ orthogonale pour φ.
4. Ecrire la matrice de passage de $\mathcal{M}$ à $\mathcal{O}$.

Exercice 10. Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire symétrique sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Question de cours : Donner la définition de l'*orthogonal* $F^\perp$ d'un sous-espace vectoriel $F \subset E$ ainsi que celle du *noyau* $\operatorname{Ker}\varphi$ de la forme φ. Quand dit on que φ est *non dégénérée* ?
2. Pour les E, φ et $F \subset E$ ci-dessous calculer le rang de φ puis déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$ et $F^\perp$.
   (a) $E = \mathbb{R}^3, \varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ le produit scalaire usuel, $F = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.
   (b) $E = \mathbb{R}[X]_3, \varphi : \varphi(P, Q) = P'(0)Q(0) + P(0)Q'(0),\ F = \mathbb{R}[X]_2$.
   (c) $E = M_2(\mathbb{K}), \varphi(M) = |M|, F = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})\ ;\ a, c \in \mathbb{K}\right\}$

Exercice 11. Démontrer que, pour toute forme bilinéaire symétrique φ sur un espace vectoriel E, pour tous sous-espaces vectoriels W, U, on a les deux propriétés suivantes :

1. $(U + W)^\perp = (U^\perp) \cap (W^\perp)$.
2. $(U \cap W)^\perp \supset U^\perp + W^\perp$ avec égalité si φ est non dégénérée.

Peut on remplacer « si » par « si et seulement si » ? Donner un exemple avec inclusion stricte.

Exercice 12. Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. Un sous-espace $I \subset E$ est dit *(totalement) isotrope* si la restriction $\varphi_{I \times I} = 0$ de φ à $I \times I$ est la forme nulle.

1. Rappeler la définition, pour un vecteur $x \in E$, d'être *isotrope* et prouver que si tous les vecteurs $f \in F$ d'un sous-espace $F \subset E$ sont isotropes, alors F est totalement isotrope.
2. Vérifier que $I \subset E$ est totalement isotrope si et seulement si $I \subset I^\perp$.
3. En déduire [3] que la dimension d'un sous-espace $I \subset E$ isotrope, vérifie $2 \dim I \leq \dim E$.
4. On suppose que E est de dimension finie et posséde un sous-espace $I \subset E$ tel que $I = I^\perp$.
   (a) Si $\dim I = m$ prouver $\dim E = 2m$ et, si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_m)$ est une base de E commençant par une base $(e_1, \ldots, e_m)$ de I, écrire la [4] matrice Φ de φ dans $\mathcal{B}$.
   (b) Prouver qu'il y a des matrice $Y, Z \in M_m(\mathbb{K})$ telle que on ait :

$$\begin{pmatrix} 1_m & 0_m \\ Y^t & Z^t \end{pmatrix} \Phi \begin{pmatrix} 1_m & Y \\ 0_m & Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_m & 0_m \\ Y^t & Z^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_m & Y \\ 0_m & Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_m & 1_m \\ 1_m & 0_m \end{pmatrix}$$

---

2. non nul, mais éventuellement $(a = 0)$ dégénéré en une application affine $t \mapsto bt + c$.
3. dans le cas où E est de dimension finie.
4. En notant cette matrice $2m \times 2m$ comme $\Phi = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, une matrice 2×2 de blocs $m \times m$.