Exercice 1. Soit $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'espace vectoriel $E = M_2(\mathbb{K})$ et l'endomorphisme :

$$\alpha : E \to E, \quad \alpha(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

1. Pour tout $M, N \in M_2(\mathbb{K})$ en calculant les sommes et produits de matrices indiqués, vérifier :
   (a) La relation $\alpha(M \cdot N) = \alpha(N) \cdot \alpha(M)$.
   (b) Le fait qu'il y a des applications $\Delta : M_2(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ et $\beta : M_2(\mathbb{K}) \times M_2(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ telles que $M \cdot \alpha(M) = \Delta(M) Id_2$ et $M \cdot \alpha(N) + N \cdot \alpha(M) = \beta(M, N) Id_2$.
   (c) En déduire la relation $\Delta(M \cdot N) = \Delta(M) \cdot \Delta(N)$.
2. Rappeler ce qu'est symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$ et expliciter la matrice $(\delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2} \in M_2(\mathbb{K})$.
3. Pour des indices $k, l \in \{1, 2\}$, expliciter les quatre matrices $e_{k,l} = (\delta_{k,i} \cdot \delta_{l,j})_{1 \leq i,j \leq 2} \in M_2(\mathbb{K})$ et vérifier que $\mathcal{E} = (e_{1,1}, e_{2,2}, e_{1,2}, e_{2,1})$ est une base de l'espace vectoriel $E = M_2(\mathbb{K})$.
4. Ecrire la matrice $A = Mat_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\alpha)$ de α dansla base $\mathcal{E}$ et calculer son polynôme caractéristique.
5. En déduire les valeurs propres de α et vérifier le résultat en constatant que $\alpha \circ \alpha = Id_{M_2(\mathbb{K})}$.
6. Déterminer les espaces propres de l'endomorphisme α.
7. En déduire une rédaction sans calcul matriciel de de $1.(b)$ en vérifiant que les matrices $M \cdot \alpha(M)$ et $M \cdot \alpha(N) + N \cdot \alpha(M)$ sont dans l'espace propre de valeur propre 1 de α.

Exercice 2. Pour $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, soit le polynôme $P_n^z = (X - z)^n \in \mathbb{C}[X]$.

1. Questions de cours Rappeller (en montrant l'affirmation et donnant les définitions) :
   (a) Pourquoi la famille $\mathcal{M}_z = (P_n^z)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E = \mathbb{C}[X]$.
   (b) Si E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $(e_i)_{i \in I}$,
   la définition de la famille $\mathcal{B} = (e_i^*)_{i \in I}$ des formes linéaires coordonnées dans $\mathcal{B}$.
2. Soit $\varphi = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n \cdot P_n^{0*}$ une combinaison linéaire des formes linéaires coordonnées dans $\mathcal{M}_0$.
   Prouver que pour n assez grand $\varphi(P_n^0) = 0$.
3. En déduire que $ev_1 : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}, ev_1(P) = P(1)$, l'évaluation en 1 est un élément de E^* hors du sous-espace de E^* engendré par $(P_n^{0*})_{n \in \mathbb{N}}$. Est-elle dans celui engendré par $(P_n^{1*})_{n \in \mathbb{N}}$?

Exercice 3. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base [1] d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $\varphi : E \to \mathbb{K}$ une forme linéaire.

1. Dans le cas où I est infini, prouver que la formule $S(\sum_{i \in I} x_i \cdot e_i) = \sum_{i \in I} x_i$ a un sens et définit une forme linéaire $S : E \to \mathbb{K}$ sur E qui n'est pas dans le sous-espace vectoriel du dual E^* de E engendré par les formes linéaires coordonnées e_i^*.
2. Rappeler la construction donnée en cours, quand $dim E$ est finie, d'une base de $Ker\, \varphi$.
3. Prouver que si φ est non nulle il y a un indice $i_0 \in I$ tel que $\varphi(e_{i_0}) \neq 0$. On note $J = I \backslash \{i_0\}$.
4. Avec les notations de 3. prouver que, si $f_{i_0} = e_{i_0}$ et si $j \neq i_0$, $f_j = e_j - \frac{f(e_j)}{f(e_{i_0})} \cdot e_{i_0}$, les familles $(f_i)_{i \in I}$ et $(f_j)_{j \in J}$ sont des bases de E et $Kerf$ respectivement.
5. En déduire que pour toute forme linéaire $\varphi \in E^* \backslash \{0\}$ non nulle sur E,
   il y a une base $(g_i)_{i \in I}$ de E dont elle est forme linéaire coordonnée $\varphi = g_{i_0}^*$.

Exercice 4. Soit $F \subset E$ un sous-espace d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Prouver que $\rho_F : E^* \to F^*, \rho_F(f) = f_{|F} : F \to \mathbb{K}$ la *restriction des formes linéaires au sous-espace* F est linéaire surjective. [Considérer une base de E contenant une base de F].
2. Dans le cas où $dim E$ est finie, en déduire en fonction de de $dim E$ et $dim F$ la dimension du sous-espace $F^O = \{\varphi \in E^* ; \forall f \in F, \varphi(f) = 0\}$ du dual E^* des formes s'annulant sur F.

---

1. Si $x \in E$, on note l'écriture de x dans cette base $x = \sum_{i \in I} x_i \cdot e_i, x_i = e_i^*(x) \in \mathbb{K}$.

Exercice 5. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, k formes linéaires $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in E^*$ et $F = F_{\varphi_1,\dots,\varphi_k} = \{x \in E; \varphi_1(x) = \cdots = \varphi_k(x) = 0\}$ l'ensemble des zéros communs de ces φ_i.

1. Soit $1 \leq i_1 < \cdots < i_c \leq k$ tels que $Vect(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_c}) = Vect(\varphi_1, \dots, \varphi_k) \subset E^*$. Prouver :
$$F_{\varphi_{i_1},\dots,\varphi_{i_c}} = F_{\varphi_1,\dots,\varphi_k}$$
2. En considérant $\Phi : E \to \mathbb{K}^c, \Phi(x) = (\varphi_{i_1}(x), \dots, \varphi_{i_c}(x))$, prouver que $F_{\varphi_1,\dots,\varphi_k}$ est un sous-espace vectoriel de E et que sa dimension vérifie : $dimE - c \leq dimF \leq dimE$, de plus [2] :
$$dimF = dimE - c \Longleftrightarrow \Phi \text{ est surjective} \Longleftrightarrow (\varphi_1, \dots, \varphi_c) \text{ est libre dans} E^*$$
3. En appliquant 2. à une famille $(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_c})$ comme dans 1. avec c le plus petit possible, déterminer la dimension de $F_{\varphi_1,\dots,\varphi_k}$ dans le cas :
$E = \mathbb{R}^4, k = 4$ et [3] $\varphi_1 = e_1^* - e_2^*,\ \varphi_2 = e_2^* - e_3^*,\ \varphi_3 = e_2^* + e_3^* - 2e_4^*,\ \varphi_4 = e_1^* + e_2^* - 2e_4^*$

Exercice 6. Les fonctions suivantes sont-elles bilinéaires, si oui, sont-elles sont symétriques ?

1. $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad b((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 + x_2y_2.$
2. $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad b((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 + x_2x_1.$
3. $b : \mathbb{R}[X]_n \times \mathbb{R}[X]_n \to \mathbb{R}, \quad b(P, Q) = P'(1)Q(0) + Q'(1)P(0).$
4. $b : C([a, b], \mathbb{R}) \times C([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad b(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$

Exercice 7. Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriel et $f \in E^*, g \in F^*$. Prouver que :

1. $f \cdot g : E \times G \to \mathbb{K}, f \cdot g\,(u, v) = f(u) \cdot g(u)$ est bilinéaire. et si $G = E$, elle est symétrique.
2. Si $\varphi : E \times E \to F$ est bilinéaire alors $g \circ \varphi : E \times F \to \mathbb{K}$ est une forme bilinéaire sur E.

Reprendre éventuellement la rédaction des points 1., 3. et 4. de l'exercice précédent.

Exercice 8. a) Pour chaque forme bilinéaire, calculer sa matrice M_1 dans la base $\mathcal{B}_1$ et sa matrice M_2 dans la base $\mathcal{B}_2$. Calculer la matrice de passage P de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ et vérifier que $M_2 = {}^tPM_1P$.

1. $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 + 3y_1x_2,\ \mathcal{B}_1 = ((1, 0), (0, 1)),\ \mathcal{B}_2 = ((1, 1), (2, 1))$
2. $\phi : (Q, R) \in \mathbb{R}[X]_2 \times \mathbb{R}[X]_2 \mapsto Q(2)R(1) \in \mathbb{R},\ \mathcal{B}_1 = (1, X, X^2),\ \mathcal{B}_2 = (1, X-1, X^2-3X+2).$
3. $\phi : (Q, R) \in \mathbb{R}[X]_2 \times \mathbb{R}[X]_2 \mapsto \int_0^1 Q(x)R(1-x)dx,\ \mathcal{B}_1 = (1, X, X^2),\ \mathcal{B}_2 = (1, X-1, X^2-X).$

b) Prouver que β de l'**Ex. 1.** 1.(b) est une forme bilinéaire et écrire sa matrice B dans la base $\mathcal{E}$.

Exercice 9. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et une application bilinéaire $\psi : E \times E \to F$.

1. Soit $v, w \in E$. En appliquant la linéarité de chaque côté, développer $\psi(v + w, v + w)$.
2. En déduire que si pour tout $u \in E$ on a $\psi(u, u) = 0$ alors ψ est antisymétrique.

Exercice 10. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\varphi, \psi \in E^*$. Démontrer que :

1. $b : (u, v) \in E \times E \mapsto \varphi(u)\psi(v) + \varphi(v)\psi(u) \in \mathbb{C}$ est une forme bilinéaire symétrique.
2. $a : (u, v) \in E \times E \mapsto \varphi(u)\psi(v) - \varphi(v)\psi(u)$ est une forme bilinéaire antisymétrique.

Si $E = \mathbb{R}^3$ et pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\varphi(x) = s_1x_1 + s_2x_2 + s_3x_3$, $\psi(x) = t_1x_1 + t_2x_2 + t_3x_3$, où les $s_i, t_i \in \mathbb{R}$ sont fixés. Donner les matrices de a et b dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 11. Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $b : V \times V \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire symétrique. Montrer les relations suivantes :

(1) $b(x + y, x + y) - b(x, x) - b(y, y) = 2b(x, y)$

(2) $b(x + y, x + y) - b(x - y, x - y) = 4b(x, y)$

(3) $b(x + y, x + y) + b(x - y, x - y) = 2\big[b(x, x) + b(y, y)\big]$

Si b est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ que dit (3) du parallélogramme porté par x et y ?

2. Pour $\Rightarrow$ de la seconde équivalence, si Φ est non surjective, en complétant une base de l'image construire une forme linéaire non nulle $\varphi \in (\mathbb{K}^c)^* \setminus \{0\}, \varphi(y_1, \dots, y_c) = \lambda_1y_1 + \cdots + \lambda_cy_c$.

3. où $(e_1^*, \dots, e_4^*)$ est la base des formes coordonnées dans la base canonique du dual E^*.