Université Joseph Fourier Grenoble I **Année 2011/2012**

MAT244 : Corrigé du contrôle continu du 20 avril 2012

Question de cours. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace hermitien de dimension finie sur $\mathbb{C}$. On rappelle qu'un endomorphisme unitaire est un endomorphisme u tel que $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$.

1. Voici 4 autres propriétés caractéristiques équivalentes à ce que u soit unitaire : (i) u préserve le produit scalaire hermitien : $\forall x, y \in E$, $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$; (ii) u est inversible et son adjoint u^* vérifie $u^* = u^{-1}$; (iii) u transforme une base orthonormée de E en une base orthonormée de E ; (iv) Les colonnes (ou les lignes) de la matrice A de u dans une base orthonormée de E forment un système orthonormé.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de u. Si $x \in E$, $x \neq 0$, est un vecteur propre, i.e. $u(x) = \lambda x$, la propriété d'invariance de la norme implique

$$\|x\| = \|u(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$$

et comme $\|x\| \neq 0$ on en déduit après division par $\|x\|$ que $|\lambda| = 1$.

Exercice 1.

1. Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, on considère la conique d'équation $x^2 + 4xy + 4y^2 - x - y + 1 = 0$. On constate ici immédiatement que la partie quadratique $x^2 + 4xy + 4y^2 = (x + 2y)^2$ est un carré (le discriminant est nul). Nous sommes conduits à effectuer le changement de coordonnées orthonormé

$$\begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y) \\ Y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x + y). \end{cases}$$

La matrice inverse d'une matrice orthonormée étant donnée par la transposée, on trouve (sans calcul à effectuer a priori, bien que celui-ci soit également à peu près évident...)

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(X - 2Y) \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2X + Y). \end{cases}$$

On obtient donc $-x - y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-3X + Y)$ et l'équation de la conique devient

$$5X^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}(-3X + Y) + 1 = 0 \iff 5(X - 3\sqrt{5}/50)^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}(Y + 91\sqrt{5}/100) = 0$$

Si l'on pose $X' = X - 3\sqrt{5}/50$, $Y' = Y + 91\sqrt{5}/100$, l'équation devient $Y' = -5\sqrt{5}X'^2$, il s'agit d'une parabole de sommet $S : X_S = 3\sqrt{5}/50$, $Y_S = -91\sqrt{5}/100$ (soit $x_S = 47/25$, $y_S = -79/100$), d'axe SY, tournée du côté $Y < 0$, la direction asymptotique de l'axe est de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. Les calculs du 1. montrent que la quadrique $x^2 + 4xy + 4y^2 + z^2 - x - y + 1 = 0$ de $\mathbb{R}^3$ admet pour équation

$$5X'^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}Y' + Z'^2 = 0$$

dans les coordonnées orthonormées

$$X' = X - X_S = \frac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y) - \frac{3\sqrt{5}}{50}, \qquad Y' = Y - Y_S = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x + y) + \frac{91\sqrt{5}}{100}, \qquad Z' = z.$$

L'équation s'écrit encore $Y' = -5\sqrt{5}X'^2 - \sqrt{5}Z'^2$, il s'agit d'un paraboloïde elliptique.

Exercice 2.

1. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

est une matrice symétrique réelle. On sait que les valeurs propres sont réelles et qu'il existe une base orthonormée de vecteurs propres : il existe un changement de base orthonormé P tel que $P^{-1}AP = D$ est diagonale.

2. Le vecteur de coordonnées $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A, en effet un calcul immédiat donne

$$AX = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2X,$$

la valeur propre correspondante est $\lambda_1 = -2$.
3. Nous avons

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & -3 & 1 \\ -3 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -4-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \lambda^2(-4-\lambda) - 3 - 3 + \lambda + \lambda + 9(4+\lambda) \\
&= -\lambda^3 - 4\lambda^2 + 11\lambda + 30 \\
&= -(\lambda+2)(\lambda^2 + 2\lambda - 15) = -(\lambda+2)(\lambda-3)(\lambda+5)
\end{aligned}$$

(comme $\lambda_1 = -2$ est valeur propre, on savait d'avance que le polynôme caractéristique devait admettre le facteur $\lambda + 2$). Le calcul des vecteurs propres donne

$$\lambda_1 = -2,\ V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = 3,\ V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_3 = -5,\ V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(V_1, V_2, V_3) forment une base orthogonale, une base orthonormée de vecteurs est obtenue en prenant des vecteurs unitaires colinéaires, soit

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad U_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage P dont les colonnes sont U_1, U_2, U_3 donne la diagonalisation

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

La forme quadratique de matrice A est donc non dégénérée, de signature $(2, 1)$.

Exercice 3. On se place sur l'espace $E = C^0([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[-\pi, \pi]$ dans $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire φ défini par l'expression suivante :

$$\varphi(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx.$$

1. On note $\mathbb{1}$ la fonction constante $x \mapsto 1$. Il est immédiat de vérifier que le système de fonctions $\mathscr{B} = (\mathbb{1}, \cos, \sin)$ est orthogonal, du fait que les primitives des fonctions $x \mapsto 1 \cdot \cos x$, $x \mapsto 1 \cdot \sin x$, $x \mapsto \cos x \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x$ sont périodiques de période 2π, les intégrales sur $[-\pi, \pi]$ sont donc nulles. Si $q(f) = \varphi(f, f)$ est la forme quadratique associée à φ, on trouve $q(\mathbb{1}) = 1$, $q(\cos) = q(\sin) = \frac{1}{2}$ (par exemple en obervant que $q(\cos) = q(\sin)$ puisqu'il y a juste un décalage de $\pi/2$, tandis que $\cos^2 + \sin^2 = \mathbb{1}$. De plus $\mathscr{B}$ est une famille libre [on peut le vérifier directement à partir d'une combinaison linéaire $\alpha + \beta \cos x + \gamma \sin x = 0$ en prenant successivement $x = 0$ qui donne $\alpha + \beta = 0$, $x = \pi$ qui donne $\alpha - \beta = 0$, donc $\alpha = \beta = 0$, puis $\gamma = 0$ en prenant $x = \pi/2$;

on peut aussi arguer du fait qu'un système de vecteurs non nuls qui est orthogonal par arpport à un forme bilinéaire symétrique définie positive est automatiquement libre]. Par conséquent $\mathscr{B}$ engendre un sous-espace F de dimension 3, et $\mathscr{B}$ en est une base orthogonale ; une base orthonormée est $(e_1,e_2,e_3)=(\mathbb{1},\sqrt{2}\cos,\sqrt{2}\sin)$.

2. D'après le cours la projection orthogonale $\pi_F : E\to F$ est donnée par

$$\pi_F(f)=\langle e_1,f\rangle e_1+\langle e_2,f\rangle e_2+\langle e_3,f\rangle e_3=\langle \mathbb{1},f\rangle\mathbb{1}+2\langle\cos,f\rangle\cos+2\langle\sin,f\rangle\sin,$$

soit encore

$$\pi_F(f)=g \ \text{ avec } \ g(x)=\alpha+\beta\cos x+\gamma\sin x,$$

où

$$\alpha=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx,\qquad \beta=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\cos x\,dx,\qquad \gamma=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\sin x\,dx.$$

3. Chercher un triplet (a_0,b_0,c_0) dans $\mathbb{R}^3$ qui minimise

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(x-a-b\cos x-c\sin x\Big)^2\,dx$$

revient à cherche une fonction $g\in F$ qui minimise la norme $\|\operatorname{Id}-g\|$ mesurant l'écart de $g=a\mathbb{1}+b\cos+c\sin$ à la fonction identique $\operatorname{Id}: x\mapsto x$ sur $[-\pi,\pi]$. On sait que la solution est donnée par $g_0=\pi_F(\operatorname{Id})$, et que cette solution est unique ; en fait, pour $g\in F$, le théorème de Pythagore donne

$$\|\operatorname{Id}-g\|^2=\|\operatorname{Id}-g_0\|^2+\|g_0-g\|^2\qquad \text{où } \operatorname{Id}-g_0\in F^{\perp},\ g-g_0\in F.$$

D'après 2. on trouve

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\,dx=0,\qquad b_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos x\,dx=0\qquad \text{par parité},$$

tandis qu'une intégration par parties donne

$$c_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin x\,dx=\frac{2}{\pi}\Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi}+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x dx=2.$$

La norme minimale est donnée par

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x-2\sin x)^2\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x^2-4x\sin x+4\sin^2x)\,dx=\frac{\pi^2}{3}-4+2=\frac{\pi^2}{3}-2\simeq 1{,}29.$$

4. Soit G l'espace vectoriel engendré par F et par la fonction identique $\operatorname{Id}: x\mapsto x$. Comme $\operatorname{Id}\notin F$, l'espace G est de dimension 4. La fonction $u=\operatorname{Id}-\pi_F(\operatorname{Id}) : x\mapsto x-2\sin x$ est dans G et orthogonale à F. On voit donc que $(\mathbb{1},\cos,\sin,u)$ est une base orthogonale de G. Ceci donne la base orthonormée

$$\Big(\mathbb{1},\sqrt{2}\cos,\sqrt{2}\sin,\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2}{3}-2}}u\Big).$$

5. La forme quadratique Q sur $\mathbb{R}^4$ telle que

$$Q(a,b,c,d)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(a+b\cos x+c\sin x+dx\Big)^2\,dx$$

est donnée d'après ce qui précède par

$$Q(a,b,c,d)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(a+b\cos x+(c+2d)\sin x+d(x-2\sin x)\Big)^2\,dx=a^2+\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}(c+2d)^2+\Big(\frac{\pi^2}{3}-2\Big)d^2$$

du fait de l'orthogonalité des fonctions mises en jeu. Le bloc 2×2 impliquant les coefficients (a,b) est déjà diagonal avec valeurs propres $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\frac{1}{2}$ (et vecteurs propres associés $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$), il suffit donc de diagonaliser l'autre bloc 2×2

$$Q(0,0,c,d)=\frac{1}{2}(c+2d)^2+\Big(\frac{\pi^2}{3}-2\Big)d^2=\frac{1}{2}c^2+2cd+\frac{\pi^2}{3}d^2.$$

La matrice de la forme quadratique $(c,d) \mapsto Q(0,0,c,d)$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{\pi^2}{3} \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est $(\lambda - \frac{1}{2})(\lambda - \frac{\pi^2}{3}) - 1 = \lambda^2 - (\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{3})\lambda + \frac{\pi^2}{6} - 1$, dont les racines sont

$$\lambda_3,\ \lambda_4 = \frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{6} \pm \sqrt{\frac{17}{16} - \frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^4}{36}}$$

(mais le calcul précis de λ_3, λ_4 est inutile pour ce qui suit). Les vecteurs propres correspondants de Q sont donnés par $(a,b) = (0,0)$ et $(\frac{1}{2} - \lambda_i)c + d = 0$, soit

$$(a,b,c,d) = \left(0,0,1,\lambda_i - \frac{1}{2}\right), \quad i = 3,4,$$

et il faut bien entendu diviser chaque vecteur par $\sqrt{1 + (\lambda_i - 1/2)^2}$ si l'on veut une base orthonormée.