Université Joseph Fourier **MAT244 : Contrôle continu du 19 mars 2012**
L2 **Mathématiques**

Durée 2 heures
Documents et calculatrices non autorisés

Questions de cours

1. Une forme bilinéaire φ sur un espace vectoriel E (sur l'un des corps $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) se décompose de manière unique en la somme d'une forme bilinéaire symétrique et d'une forme bilinéaire antisymétrique. En effet, si on considère la transposée $\varphi^t(x,y) = \varphi(y,x)$, on peut écrire

$$\varphi = \sigma + \alpha \qquad \text{avec } \sigma = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi^t), \quad \alpha = \frac{1}{2}(\varphi - \varphi^t),$$

où σ est symétrique et α antisymétrique. Cette écriture est unique, car on doit avoir $\varphi^t = \sigma - \alpha$ et les formules pour σ et α en résultent nécessairement. Supposons $\dim_{\mathbb{K}} E = n$. Les formes bilinéaires forment un espace de dimension n^2 isomorphe à l'espace des matrices carrées $n \times n$; les matrices antisymétriques sont déterminées par les coefficients situés strictement au dessus de la diagonale (les coefficients diagonaux devant être nuls), ce qui donne la dimension $\frac{1}{2}(n^2 - n) = \frac{1}{2}n(n-1)$. L'espace des matrices symétriques est de dimension $n^2 - \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n(n+1)$.

2. Pour une forme quadratique semi-positive de forme polaire φ, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit

$$\forall x, y \in, \qquad |\varphi(x,y)| \leq \|x\|\,\|y\| = \sqrt{\varphi(x,x)}\,\sqrt{\varphi(y,y)}.$$

(Si φ est définie positive, l'égalité a lieu si et seulement si les vecteurs x, y sont colinéaires). L'inégalité triangulaire s'obtient en calculant

$$\|x+y\|^2 = \varphi(x+y, x+y) = \varphi(x,x) + \varphi(y,y) + 2\varphi(x,y) \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

d'où $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires et de même sens).

Exercice 1. On se place d'abord sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Pour tout vecteur de $\mathbb{K}^3$, on note (x,y,z) ses coordonnées dans la base canonique. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ telle que

$$q(x,y,z) = -x^2 + 3z^2 + 6xz - 4yz$$

1. La matrice C de q dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{K}^3$ est donnée par

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(q) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

la forme bilinéaire symétrique associée est

$$\varphi((x,y,z),(x',y',z')) = -xx' + 3zz' + 3xz' + 3zx' - 2yz' - 2zy'.$$

2. La méthode de Gauss donne

$$\begin{aligned} q(x,y,z) &= -(x^2 - 6xz) + 3z^2 - 4yz = -(x-3z)^2 + 12z^2 - 4yz = -(x-3z)^2 + 12\Big(z^2 - \frac{1}{3}yz\Big) \\ &= -(x-3z)^2 + 12\Big(z - \frac{1}{6}y\Big)^2 - \frac{1}{3}y^2. \end{aligned}$$

On obtient ainsi une décomposition de q en carrés de formes linéaires indépendantes

$$q = -\ell_1^2 + 12\,\ell_2^2 - \frac{1}{3}\ell_3^2, \qquad \ell_1(x,y,z) = x - 3z, \ \ \ell_2(x,y,z) = z - \frac{1}{6}y, \ \ \ell_3(x,y,z) = y.$$

Le ranq de q est 3, sa signature est $(1,2)$.

3. Pour déterminer une base orthogonale pour q, on effectue le changement de coordonnées

$$\begin{cases} \widetilde{x} = \ell_1(x,y,z) = x - 3z \\ \widetilde{y} = \ell_2(x,y,z) = z - \frac{1}{6}y \\ \widetilde{z} = \ell_3(x,y,z) = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \widetilde{x} + 3z = \widetilde{x} + 3\widetilde{y} + \frac{1}{2}\widetilde{z} \\ y = \widetilde{z} \\ z = \widetilde{y} + \frac{1}{6}\widetilde{z} \end{cases} .$$

Ceci donne une matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

dont les vecteurs colonnes $\widetilde{e}_1 = (1,0,0)$, $\widetilde{e}_2 = (3,0,1)$, $\widetilde{e}_3 = (\frac{1}{2},1,\frac{1}{6})$ forme une base orthogonale. On a $q(x,y,z) = -\widetilde{x}^{\,2} + 12\widetilde{y}^{\,2} - \frac{1}{3}\widetilde{z}^{\,2}$, d'où $q(\widetilde{e}_1) = -1$, $q(\widetilde{e}_2) = 12$, $q(\widetilde{e}_3) = -\frac{1}{3}$ et

$$\mathrm{Mat}_{(\widetilde{e}_1,\widetilde{e}_2,\widetilde{e}_3)}(q) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Il n'est-il pas possible de trouver une base orthonormée de q sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, sinon q serait définie positive, donc de signature $(3,0)$, or q est de signaure $(1,2)$.

4. En revanche, les vecteurs

$$\widehat{e}_1 = i\widetilde{e}_1, \quad \widehat{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{12}}\widetilde{e}_2, \quad \widehat{e}_3 = i\sqrt{3}\,\widetilde{e}_3,$$

forment une base "orthonormée" de q sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, c'est-à-dire que la matrice de q dans la base $(\widehat{e}_1,\widehat{e}_2,\widehat{e}_3)$ de $\mathbb{C}^3$ est la matrice unité 3×3.

Exercice 2. On se place dans $E = \mathbb{R}^4$. On considère les matrices symétriques :

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Soit φ_1 la forme bilinéaire symétrique dont C_1 est la matrice représentative dans la base canonique, et q_1 la forme quadratique associée. On voit imédiatement que

$$q_1(x,y,z,t) = (x-y+z-t)^2 = \ell_1(x,y,z,t)^2, \qquad \ell_1(x,y,z,t) = x-y+z-t,$$
$$\varphi_1((x,y,z,t),(x',y',z',t')) = (x-y+z-t)(x'-y'+z'-t') = \ell_1(x,y,z,t)\,\ell_1(x',y',z',t').$$

Le rang de φ_1 est donc 1 (et sa signature est $(1,0)$).

2. Soit φ_2 la forme bilinéaire symétrique dont C_2 est la matrice représentative dans la base canonique, et q_2 la forme quadratique associée. Si $u = (x,y,z,t)$, on voit aussitôt que $q_2(u) = q_1(u) - x^2 = \ell_1(u)^2 - \ell_2(u)^2$ où ℓ_1 est la forme linéaire du 1) et $\ell_2(u) = x$. Les formes ℓ_1, ℓ_2 sont indépendantes, et la forme polaire de q_2 est

$$\varphi_2(u,u') = \ell_1(u)\ell_1(u') - \ell_2(u)\ell_2(u').$$

La forme φ_2 est de rang 2, sa signature est $(1,1)$. Si l'on utilise par exemple les nouvelles coordonnées

$\widetilde{x} = \ell_1(x,y,z,t) = x-y+z-t$, $\widetilde{y} = \ell_2(x,y,z,t) = x$ et (disons) $\widetilde{z} = \ell_3(x,y,z,t) = z$, $\widetilde{t} = \ell_4(x,y,z,t) = t$,

alors ce changement de coordonnées fournit une base $(\widetilde{e}_j)$ dans laquelle

$$\mathrm{Mat}_{(\widetilde{e}_j)}(\varphi_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Le noyau de φ_2 est l'ensemble des vecteurs u tels que $\ell_1(u) = x-y+z-t = 0$ et $\ell_2(u) = x = 0$. Ceci donne $z = y+t$, d'où $(x,y,z,t) = (0,y,y+t,t) = y(0,1,1,0)+t(0,0,1,1)$, par conséquent $\mathrm{Ker}(\varphi_2)$ est le plan vectoriel admettant pour base les vecteurs $(0,1,1,0)$ et $(0,0,1,1)$. Comme
$$q_2(u) = (\ell_1(u)+\ell_2(u))(\ell_1(u)-\ell_2(u)),$$
l'ensemble des vecteurs isotropes est constitué de la réunion des deux hyperplans H, H' d'équations
$$H : \ell_1(u)+\ell_2(u) = 2x-y+z-t = 0, \qquad H' : \ell_1(u)-\ell_2(u) = -y+z-t = 0.$$
Ces deux hyperplans H, H' (qui sont de dimension 3) se coupent précisément suivant le plan $\mathrm{Ker}(\varphi_2)$.

Exercice 3. On se place sur l'espace $E = \mathbb{R}[X]_2$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2, muni de la forme φ définie par l'expression suivante :
$$\varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(x)\ Q(x)\ (1-x^2)\ dx.$$

1. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]_2$, nous avons $P(x)^2\ (1-x^2) \geq 0$ sur $[-1,1]$, donc
$$\varphi(P,P) = \int_{-1}^{1} P(x)^2\ (1-x^2)\ dx \geq 0.$$
En fait si $P \neq 0$, les racines de $x \mapsto P(x)^2\ (1-x^2)$ sont des points isolés, et la fonction est continue > 0 sur les intervalles complémentaires, donc $\varphi(P,P) > 0$. Ceci prouve que φ est un produit scalaire euclidien sur E. Notons que $\int_{-1}^{1} x^n(1-x^2)\,dx = \int_{-1}^{1}(x^n - x^{n+2})\,dx$, or
$$\int_{-1}^{1} x^n\,dx = \begin{cases} \frac{2}{n+1} & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad \int_{-1}^{1} x^n(1-x^2)\,dx = \begin{cases} \frac{4}{(n+1)(n+3)} & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases},$$
puisque $\frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+3} = \frac{4}{(n+1)(n+3)}$. La matrice de φ dans la base $(1,X,X^2)$ est donnée par les coefficients $\varphi(X^i,X^j) = \int_{-1}^{1} x^n(1-x^2)\,dx$ avec $n = i+j \in \{0,1,2,3,4\}$, et seuls $0,2,4$ comptent, d'où
$$\mathrm{Mat}_{(1,X,X^2)}(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 & \frac{4}{15} \\ 0 & \frac{4}{15} & 0 \\ \frac{4}{15} & 0 & \frac{4}{35} \end{pmatrix}.$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Pour que $\lambda X^2 - 1$ soit orthogonal au polynôme constant 1, il faut et il suffit que l'on ait $\varphi(1, \lambda X^2 - 1) = \frac{4}{15}\lambda - \frac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5$. Comme les polynômes 1 et X sont orthogonaux, et que $5X^2-1$ est orthogonal à 1 et à X, on en déduit que $(1, X, 5X^2-1)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]_2$. D'après 1), nous avons déjà $\|1\|^2 = \frac{4}{3}$, $\|X\|^2 = \frac{4}{15}$, tandis que
$$\|5X^2-1\|^2 = \varphi(5X^2-1, 5X^2-1) = 25\varphi(X^2,X^2) - 10\varphi(1,X^2) + \varphi(1,1) = \frac{100}{35} - \frac{40}{15} + \frac{4}{3} = \frac{32}{21} = \frac{64}{42}.$$
On en déduit qu'une base orthonormée de $\mathbb{R}[X]_2$ est
$$(b_1,b_2,b_3) = \Big(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}X, \frac{\sqrt{42}}{8}(5X^2-1)\Big)$$
et que l'orthogonal $\Pi^\perp$ du plan $\Pi = \mathrm{Vect}(1,X)$ est la droite $\Pi^\perp = \mathbb{R}(5X^2-1)$.

3. Soit $D \subset \Pi$ la droite engendrée par le polynôme $1+X$. Nous avons $\varphi(a+bX, 1+X) = \frac{4}{3}a + \frac{4}{15}b$ d'après 1), donc l'orthogonal de D dans Π est formé des polynômes $a+bX$ tels que $b = -5a$, c'est la droite $\Delta = \mathbb{R}(1-5X)$.

4. Comme $D \subset \Pi$, nous avons $D^\perp \supset \Pi^\perp = \mathbb{R}(5X^2-1)$. D'autre part $D^\perp$ contient aussi la droite $\Delta = \mathbb{R}(1-5X)$ de Π d'après 3). Il en résulte que $D^\perp$ contient le plan engendré $\mathrm{Vect}(1-5X, 5X^2-1)$, et comme $\dim D^\perp = 2$, on a en fait $D^\perp = \mathrm{Vect}(1-5X, 5X^2-1)$.