Université Joseph Fourier **MAT244 : Contrôle continu du 19 mars 2012**
L2 **Mathématiques**

Durée 2 heures
Documents et calculatrices non autorisés

Questions de cours

1. Rappeler pourquoi une forme bilinéaire φ sur un espace vectoriel E (sur l'un des corps $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) se décompose de manière unique en la somme d'une forme bilinéaire symétrique et d'une forme bilinéaire antisymétrique. Si E est de dimension finie n, quelles sont les dimensions respectives de l'espace des formes bilinéaires (resp. bilinéaires symétriques, bilinéaires antisymétriques) ?
2. Pour une forme quadratique semi-positive, rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puis la preuve de l'inégalité triangulaire.

Exercice 1. On se place d'abord sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Pour tout vecteur de $\mathbb{K}^3$, on note (x,y,z) ses coordonnées dans la base canonique. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ telle que

$$q(x,y,z) = -x^2 + 3z^2 + 6xz - 4yz$$

1. Donner la matrice C de q dans la base canonique de $\mathbb{K}^3$.
2. En utilisant la méthode de Gauss, déterminer une décomposition de q en carrés de formes linéaires indépendantes. En déduire le rang et la signature de q.
3. Déterminer une base orthogonale pour q. Est-il possible de trouver une base orthonormée de q sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (on justifiera la réponse) ?
4. On se place maintenant sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dans ce cas, est-il possible de trouver une base de $\mathbb{K}^3$ dans laquelle la matrice de q soit la matrice unité ?

Exercice 2. On se place dans $E = \mathbb{R}^4$. On considère les matrices symétriques :

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Soit φ_1 la forme bilinéaire symétrique dont C_1 est la matrice représentative dans la base canonique, et q_1 la forme quadratique associée. Montrer que q_1 est le carré d'une forme linéaire ℓ_1 que l'on déterminera. Quel est le rang de φ_1 ?
2. Soit φ_2 la forme bilinéaire symétrique dont C_2 est la matrice représentative dans la base canonique, et q_2 la forme quadratique associée. On pose $u = (x,y,z,t)$ et $u' = (x',y',z',t')$. Montrer que $q_2(u)$ est une différence $\ell_1(u)^2 - \ell_2(u)^2$ de carrés de formes linéaires, et exprimer $\varphi_2(u,u')$ à l'aide des images de u et u' par ℓ_1 et ℓ_2.
3. Déterminer le noyau et l'ensemble des vecteurs isotropes de φ_2.

Exercice 3. On se place sur l'espace $E = \mathbb{R}[X]_2$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2, muni de la forme φ définie par l'expression suivante :

$$\varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(x)\ Q(x)\ (1-x^2)\ dx.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire euclidien sur E et déterminer sa matrice dans la base $(1,X,X^2)$.
2. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $\lambda X^2 - 1$ soit orthogonal au polynôme constant 1. En déduire une base φ-orthonormée de E, puis l'orthogonal $\Pi^\perp$ du plan Π engendré par la base $(1,X)$.
3. Soit $D \subset \Pi$ la droite engendrée par le polynôme $1+X$. Déterminer les vecteurs de Π qui sont orthogonaux à D pour φ.
4. Déterminer l'orthogonal $D^\perp$ de D dans E relativement à φ.