Université Joseph Fourier, Année universitaire 2010/2011, Licence de Sciences et Technologies, Unité **MAT244**
Examen terminal, session 2, durée 2h - il sera tenu particulièrement compte de la rédaction

Documents, calculettes et téléphones portables interdits

Exercice 1. Soit $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la fonction $q(x) = \det(\begin{smallmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{smallmatrix})$, où $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. On note $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

a) Montrer que q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$. Déterminer sa forme polaire et sa matrice $M(q)$ dans la base $\mathcal{E}$.

b) Effectuer une décomposition de q en carrés de formes linéaires indépendantes. En déduire le rang et la signature de q.

c) Montrer que les 4 vecteurs $e_1 \pm e_4$, $e_2 \pm e_3$ sont des vecteurs propres de $M(q)$. En déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ (pour le produit scalaire usuel) dans laquelle la matrice de q est diagonale.

d) Soit $E := \mathrm{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles 2×2 et b la forme polaire de la forme quadratique $\det : \mathrm{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

Soit $F \subset E$ le sous-espace vectoriel des matrices $(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{smallmatrix})$ telles que $a_1 + a_4 = 0$. Montrer que le $b-$orthogonal de F est $\mathbb{R}I$ où I désigne la matrice unité 2×2.

Exercice 2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un paramètre réel et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) := x^2 + (4 - \alpha)y^2 - 4xy - 3y + 2x + 1$. On pose $C_\alpha := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$.

a) Montrer que C_α est une conique.

b) Déterminer la nature de C_α en fonction de la valeur de α.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique, définie par $f(x) := x^2$ si $\mid x \mid \leq \pi$.

a) Déterminer la parité de f et tracer son graphe.

b) Calculer les coefficients a_n et b_n de Fourier de f . [appliquer des intégrations par parties pour montrer que $a_n = (-1)^n \frac{4}{n^2}$ pour $n \geq 1$]

c) Déterminer la série de Fourier $\mathrm{S}[f]$ de f et les points $x \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{S}[f](x) = f(x)$.

d) Evaluer $\mathrm{S}[f]$ en π. En déduire la valeur de la somme $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

⁕