

Noyau de Szegö et calcul numérique de l'application conforme de Riemann

d'après Norberto Kerzman et Manfred Trummer

Notations. – Soit P une partie de \mathbb{R}^n et I un intervalle fermé borné de \mathbb{R} . A toute fonction continue $K(t, s)$ sur $P \times I$, on associe un opérateur \mathbb{K} de $L^1(I)$ à valeurs dans l'espace $C(P)$ des fonctions continues sur P , défini par

$$\mathbb{K}u(t) = \int_I K(t, s) u(s) ds, \quad t \in P.$$

La fonction K sera appelée *noyau de l'opérateur* \mathbb{K} . Pour $P = I$ et $u, v \in L^2(I)$, le théorème de Fubini donne

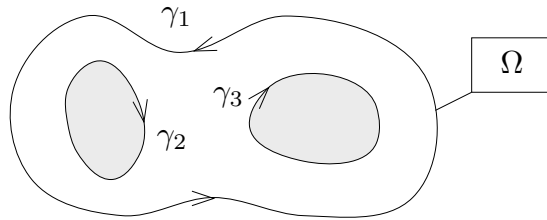
$$\langle \mathbb{K}u, v \rangle = \int_{I \times I} K(t, s) u(s) \bar{v}(t) ds dt$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique

$$|\langle \mathbb{K}u, v \rangle| \leq \|K\|_{L^2(I \times I)} \|u\|_2 \|v\|_2.$$

Par conséquent $\|\mathbb{K}\| \leq \|K\|_2$, et un argument de densité montre que \mathbb{K} définit un opérateur continu $L^2(I) \rightarrow L^2(I)$ pour tout noyau $K \in L^2(I \times I)$.

Soit Ω un ouvert connexe borné du plan complexe \mathbb{C} dont la frontière $\partial\Omega$ est une réunion de courbes fermées de classe C^k , $k \geq 2$.



On désigne par $\mathcal{O}(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes sur Ω , muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Par ailleurs, on note ds la mesure de longueur d'arc sur $\partial\Omega$ et s l'abscisse curviligne sur chaque composante connexe, calculée à partir d'une origine quelconque. Enfin $L^p(\partial\Omega)$ désigne l'espace des fonctions L^p à valeurs complexes sur $\partial\Omega$ muni de la mesure ds .

1. Transformation de Hilbert.

Si f est une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ et holomorphe dans Ω , la formule de Cauchy donne

$$f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-w} dz, \quad w \in \Omega.$$

Notons $z = \gamma(s)$ la paramétrisation de $\partial\Omega$ par l'abscisse curviligne. On a $dz = \tau(z) ds$ où $\tau(z) = \gamma'(s)$ est le vecteur unitaire tangent à $\partial\Omega$ au point z . Par suite

$$f(w) = \int_{\partial\Omega} H(w, z) f(z) ds \quad \text{avec}$$

$$H(w, z) = \frac{1}{2i\pi} \frac{\tau(z)}{z-w}, \quad w \in \Omega, \quad z \in \partial\Omega.$$

Définition 1.1. – La fonction $H(w, z)$ est appelée noyau de Cauchy de Ω . Si u est une fonction sur $\partial\Omega$, la transformée de Hilbert de u est définie par

$$\mathbb{H}u(w) = \int_{\partial\Omega} H(w, z) u(z) ds, \quad w \in \Omega.$$

Comme le noyau H est continu sur $\Omega \times \partial\Omega$, $\mathbb{H}u$ est bien définie dès que $u \in L^1(\partial\Omega)$, et donc aussi si $u \in L^p(\partial\Omega) \subset L^1(\partial\Omega)$, $p \geq 1$.

Proposition 1.2. – Pour tout $u \in L^1(\partial\Omega)$, $\mathbb{H}u$ est holomorphe sur Ω , et l'opérateur $\mathbb{H} : L^p(\partial\Omega) \rightarrow \mathcal{O}(\Omega)$ est continu.

Démonstration. – Le noyau $H(w, z)$ est différentiable par rapport à w et on a

$$\frac{\partial H}{\partial w}(w, z) = \frac{1}{2i\pi} \frac{\tau(z)}{(z-w)^2}, \quad \frac{\partial H}{\partial \bar{w}}(w, z) = 0.$$

Les dérivées partielles $\partial H/\partial w$ et $\partial H/\partial \bar{w}$ sont donc continues sur $\Omega \times \partial\Omega$. D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, on en déduit que $\mathbb{H}u$ est différentiable et que

$$\frac{\partial}{\partial w} \mathbb{H}u(w) = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2i\pi} \frac{\tau(z)}{(z-w)^2} u(z) ds, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \mathbb{H}u(w) = 0,$$

donc $\mathbb{H}u$ est holomorphe sur Ω . On a par ailleurs

$$|H(w, z)| = (2\pi|z-w|)^{-1} \leq (2\pi d(w, \partial\Omega))^{-1}.$$

Si K est une partie compacte de Ω , on obtient

$$\sup_{w \in K} |\mathbb{H}u(w)| \leq (2\pi d(K, \partial\Omega))^{-1} \|u\|_1,$$

donc $\mathbb{H} : L^1(\partial\Omega) \rightarrow \mathcal{O}(\Omega)$ est continu. Le résultat est vrai aussi pour $L^p(\partial\Omega)$ puisque l'inclusion $L^p(\partial\Omega) \rightarrow L^1(\partial\Omega)$ est continue. \square

Formule 1.3. – Si $u \in C^1(\partial\Omega)$, on définit la dérivée de u le long de $\partial\Omega$ par

$$u'(\gamma(s)) = \frac{1}{\gamma'(s)} \frac{d}{ds} [u(\gamma(s))].$$

Alors $(\mathbb{H}u)' = \mathbb{H}(u')$ sur Ω .

En effet, comme $dz/ds = \gamma'(s) = \tau(z)$ le long de $\partial\Omega$, le calcul ci-dessus suivi d'une intégration par parties montre que

$$\begin{aligned} (\mathbb{H}u)'(w) &= \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2i\pi} \frac{\tau(z)}{(z-w)^2} u(z) ds = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2i\pi} \frac{d}{ds(z)} \left[\frac{-1}{z-w} \right] u(\gamma(s)) ds \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2i\pi} \frac{1}{z-w} \frac{d}{ds} [u(\gamma(s))] ds = \int_{\partial\Omega} H(w, z) u'(z) ds = \mathbb{H}(u')(w). \end{aligned}$$

Exemple 1.4. – $\Omega =$ disque unité $\mathbb{D} = \{w \in \mathbb{C}; |w| < 1\}$.

La paramétrisation de $\partial\mathbb{D}$ par l'abscisse curviligne s'écrit

$$z = \gamma(s) = e^{is}, \quad s \in [0, 2\pi].$$

On a $\gamma'(s) = ie^{is} = iz$, donc le noyau de Cauchy de \mathbb{D} est donné par

$$H^{\mathbb{D}}(w, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is} - w} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1 - w e^{-is}} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1 - w\bar{z}}.$$

Puisque $|w| < 1$, $H^{\mathbb{D}}(w, z)$ est développable en série entière normalement convergente sur tout compact de $\mathbb{D} \times \partial\mathbb{D}$:

$$H^{\mathbb{D}}(w, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} w^n e^{-ins}.$$

On peut donc écrire

$$\mathbb{H}^{\mathbb{D}}u(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} \hat{u}(n) w^n \quad \text{où} \quad \hat{u}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{is}) e^{-ins} ds, \quad n \in \mathbb{Z}$$

est le n -ième coefficient de Fourier de u . Si $u \in L^2(\partial\mathbb{D})$, la fonction u s'écrit elle-même comme somme d'une série de Fourier L^2 -convergente

$$u(e^{is}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{u}(n) e^{ins}$$

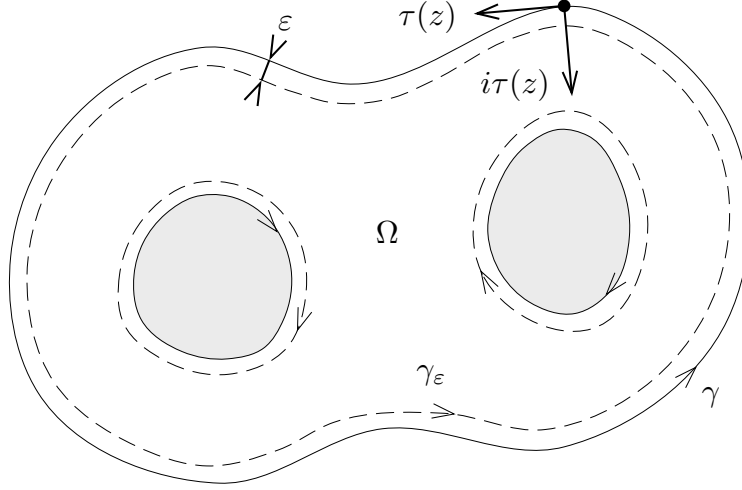
et d'après la formule de Parseval, la transformation de Fourier est une isométrie d'espaces de Hilbert:

$$\begin{aligned} L^2(\partial\mathbb{D}) &\longrightarrow l^2(\mathbb{Z}) \\ u &\longmapsto \sqrt{2\pi} (\hat{u}(n))_{n \in \mathbb{Z}}. \quad \square \end{aligned}$$

Revenons au cas général. On considère pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit la courbe de classe C^{k-1}

$$\gamma_\varepsilon(s) = \gamma(s) + \varepsilon i\gamma'(s) = z + \varepsilon i\tau(z), \quad z = \gamma(s) \in \partial\Omega,$$

où $i\gamma'(s)$ est le vecteur normal rentrant à $\partial\Omega$.



Notre objectif est d'étudier le comportement de $\mathbb{H}u$ sur la courbe γ_ε lorsque ε tend vers 0. Pour cela, on définit un opérateur \mathbb{H}_ε sur $L^2(\partial\Omega)$ à valeurs dans $C^{k-1}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$ par

$$\mathbb{H}_\varepsilon u(w) = \mathbb{H}u(w + \varepsilon i\tau(w)) \quad \text{i.e.} \quad \mathbb{H}_\varepsilon u(\gamma(s)) = \mathbb{H}u(\gamma_\varepsilon(s)).$$

L'opérateur \mathbb{H}_ε est associé au noyau

$$H_\varepsilon(w, z) = H(w + \varepsilon i\tau(w), z) = \frac{1}{2i\pi} \frac{\tau(z)}{z - w - \varepsilon i\tau(w)}.$$

Théorème 1.5. – (a) Si $u \in L^2(\partial\Omega)$, alors $\mathbb{H}_\varepsilon u$ converge dans $L^2(\partial\Omega)$ vers une limite notée $\mathbb{H}_0 u$, où \mathbb{H}_0 est un opérateur continu sur $L^2(\partial\Omega)$. De plus, il existe une constante $C > 0$ indépendante de ε, u telle que

$$\|\mathbb{H}_\varepsilon u\|_2 \leq C \|u\|_2.$$

(b) Si $u \in C^q(\partial\Omega)$, $1 \leq q \leq k$, alors $\mathbb{H}u$ se prolonge en une fonction de classe C^{q-1} sur $\overline{\Omega}$.

Démonstration. – On montre d'abord le théorème lorsque $\Omega = \mathbb{D}$.

(a) On a par définition $\gamma_\varepsilon(s) = (1 - \varepsilon)e^{is}$, d'où

$$\mathbb{H}_\varepsilon^\mathbb{D} u(e^{is}) = \mathbb{H}^\mathbb{D} u((1 - \varepsilon)e^{is}) = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - \varepsilon)^n \widehat{u}(n) e^{ins}.$$

Si $\mathbb{H}_0^\mathbb{D}$ est l'opérateur obtenu en faisant $\varepsilon = 0$ dans la formule ci-dessus, l'égalité de Parseval montre que $\|\mathbb{H}_\varepsilon^\mathbb{D} u\|_2 \leq \|u\|_2$ pour tout ε et

$$\|\mathbb{H}_0^\mathbb{D} u - \mathbb{H}_\varepsilon^\mathbb{D} u\|_2^2 = 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} [1 - (1 - \varepsilon)^n]^2 |\widehat{u}(n)|^2$$

converge vers 0 quand ε tend vers 0.

(b) La formule $(\mathbb{H}u)' = \mathbb{H}(u')$ montre qu'il suffit de considérer le cas $q = 1$. Alors, comme u' est continue, la suite des coefficients de Fourier $\widehat{u}(n)$ de u' est dans $l^2(\mathbb{Z})$.

Par suite $(\widehat{u}(n)) \in l^1(\mathbb{Z})$ grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz; il en résulte que la série $\sum \widehat{u}(n) w^n$ converge normalement sur $\overline{\mathbb{D}}$, d'où $\mathbb{H}^{\mathbb{D}}u \in C^0(\overline{\mathbb{D}})$.

On se place maintenant dans le cas d'un ouvert quelconque Ω . Si le bord $\partial\Omega$ est une réunion de courbes γ_j , alors

$$\mathbb{H}u(w) = \sum_j \int_{\gamma_j} H(w, z) u(z) ds$$

et le terme d'indice j est holomorphe (donc C^∞) sur $\mathbb{C} \setminus \{\gamma_j\}$. On peut donc supposer que $\partial\Omega$ est composé d'une seule courbe fermée, et après homothétie on se ramène au cas où $\partial\Omega$ est de longueur 2π . On a alors

$$\mathbb{H}u(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(\gamma(s))\gamma'(s)}{\gamma(s) - w} ds.$$

(a) Posons $w = \gamma(t) \in \partial\Omega$. Il vient

$$\mathbb{H}_\varepsilon u(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(\gamma(s))\gamma'(s)}{\gamma(s) - \gamma(t) - \varepsilon i\gamma'(t)} ds.$$

Comme γ est de classe C^k , $k \geq 2$, la formule de Taylor avec reste intégral donne

$$\gamma(s) - \gamma(t) = (s - t)\gamma'(t) + (s - t)^2\varphi_1(t, s)$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ sont des fonctions dans $C^{k-2}(\partial\Omega \times \partial\Omega)$. On en déduit

$$\begin{aligned} \gamma(s) - \gamma(t) - \varepsilon i\gamma'(t) &= [s - t - \varepsilon i + (s - t)^2\varphi_2(t, s)]\gamma'(t) \\ &= -i[e^{i(s-t)} - 1 + \varepsilon + (s - t)^2\varphi_3(t, s)]\gamma'(t) \\ &= -i[e^{is} - (1 - \varepsilon)e^{it} + (s - t)^2\varphi_4(t, s)]e^{-it}\gamma'(t), \\ \mathbb{H}_\varepsilon u(w) &= \int_0^{2\pi} \frac{u(\gamma(s))\gamma'(s)e^{it}}{(e^{is} - (1 - \varepsilon)e^{it})\gamma'(t)} \left[1 - \frac{(s - t)^2\varphi_4(t, s)}{e^{is} - (1 - \varepsilon)e^{it} + (s - t)^2\varphi_4(t, s)} \right] \frac{ds}{2\pi}. \end{aligned}$$

Comme $e^{i(t-s)}\gamma'(s)/\gamma'(t) = 1 + (s - t)\varphi_5(t, s)$, on peut écrire

$$\mathbb{H}_\varepsilon u(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{is} u(\gamma(s))}{e^{is} - (1 - \varepsilon)e^{it}} ds + \int_{\partial\Omega} R_\varepsilon(t, s) u(\gamma(s)) ds$$

où $R_\varepsilon(t, s)$ est de la forme

$$R_\varepsilon(t, s) = \frac{s - t}{e^{is} - (1 - \varepsilon)e^{it}} \left[\varphi_5(t, s) + \frac{s - t}{\gamma(s) - \gamma_\varepsilon(t)} \varphi_6(t, s) \right].$$

Nous pouvons interpréter cette décomposition sous la forme

$$(\mathbb{H}_\varepsilon u) \circ \gamma = \mathbb{H}_\varepsilon^{\mathbb{D}}(u \circ \gamma) + \mathbb{R}_\varepsilon(u \circ \gamma),$$

où $\mathbb{H}^{\mathbb{D}}$ est la transformation de Hilbert sur le disque. Il est facile de vérifier qu'on a des minoration

$$|e^{is} - (1 - \varepsilon)e^{it}| \geq C_1(|s - t| + \varepsilon), \quad |\gamma(s) - \gamma_\varepsilon(t)| \geq C_2(|s - t| + \varepsilon).$$

Par suite on a une majoration uniforme $|R_\varepsilon(t, s)| \leq C_3$ lorsque ε tend vers 0 et l'opérateur \mathbb{R}_ε est de norme uniformément bornée. Le théorème de convergence dominée montre que l'opérateur \mathbb{R}_ε converge en norme vers l'opérateur \mathbb{R}_0 associé au noyau R_0 . Comme l'application $u \mapsto u \circ \gamma$ est une isométrie de $L^2(\partial\Omega)$ sur $L^2([0, 2\pi]) \simeq L^2(\partial\mathbb{D})$, il en résulte, modulo cette isométrie, que \mathbb{H}_ε converge vers $\mathbb{H}_0 = \mathbb{H}_0^{\mathbb{D}} + \mathbb{R}_0$. On notera que $R_0 \in C^{k-2}(\partial\Omega \times \partial\Omega)$.

(b) On peut encore supposer $q = 1$ ici. Si $u \in C^1(\partial\Omega)$, on sait d'après la première partie que $(\varepsilon, s) \mapsto \mathbb{H}_\varepsilon^{\mathbb{D}}(u \circ \gamma)(s)$ s'étend continument à $[0, \varepsilon_0] \times [0, 2\pi]$. Il en est de même pour $\mathbb{R}_\varepsilon(u \circ \gamma)(s)$ d'après le théorème de convergence dominée, d'où $\mathbb{H}u \in C^0(\overline{\Omega})$. \square

2. Espace de Hardy $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$.

A toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, on associe les fonctions f_ε sur $\partial\Omega$ définies par

$$f_\varepsilon(\gamma(s)) = f(\gamma_\varepsilon(s)).$$

Théorème 2.1. – Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, il y a équivalence entre les propriétés suivantes:

- (a) f_ε converge dans $L^2(\partial\Omega)$ vers une fonction f_0 .
- (b) La norme $\|f_\varepsilon\|_2$ reste bornée quand ε tend vers 0.
- (c) Il existe une suite $\varepsilon_p > 0$ tendant vers 0 telle que la suite $\|f_{\varepsilon_p}\|_2$ soit bornée.
- (d) f est la transformée de Hilbert $\mathbb{H}u$ d'une fonction $u \in L^2(\partial\Omega)$.

On a alors $f = \mathbb{H}f_0$.

Démonstration. – Il est évident que (a) \implies (b) \implies (c) et l'implication (d) \implies (a) résulte du théorème 1.5, avec $f_0 = \mathbb{H}_0 u$.

Pour démontrer l'implication restante (c) \implies (d), nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.2. – Soit E un espace de Hilbert séparable et (x_n) une suite bornée de E . Alors il existe une sous-suite $(x_{n(p)})$ qui converge faiblement vers un élément $\xi \in E$, c'est-à-dire telle que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \langle x_{n(p)}, y \rangle = \langle \xi, y \rangle, \quad \forall y \in E.$$

En outre, si (y_p) converge en norme vers y , alors $\langle x_{n(p)}, y_p \rangle$ converge vers $\langle \xi, y \rangle$.

Démonstration. – Soit $(e_l)_{l \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de E , $x_n = \sum x_{n,l} e_l$ et M un majorant de $\|x_n\|$. Chaque suite $(x_{n,l})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans \mathbb{C} ; il existe donc une partie $I_0 \subset \mathbb{N}$ telle que la sous-suite $(x_{n,0})_{n \in I_0}$ ait une limite ξ_0 , puis une partie $I_1 \subset I_0$ telle que $(x_{n,1})_{n \in I_1}$ converge vers une limite ξ_1 et ainsi de suite. Soit $n(p)$ le p -ième élément de I_p . La sous-suite diagonale $x_{n(p)}$ a la propriété que chaque coordonnée $x_{n(p),l}$ tend vers une limite ξ_l , et on voit facilement que $\sum |\xi_l|^2 \leq M^2$, de sorte que le vecteur $\xi = \sum \xi_l e_l$ est bien défini. Comme

$$\left| \sum_{l \geq L} x_{n(p),l} \bar{y}_l \right| \leq M \left(\sum_{l \geq L} |y_l|^2 \right)^{1/2}$$

où le second membre converge vers 0 quand L tend vers $+\infty$, il est élémentaire de vérifier que $\langle x_{n(p)}, y \rangle$ converge vers $\langle \xi, y \rangle$ pour tout $y \in E$. La dernière affirmation résulte de ce que

$$|\langle x_{n(p)}, y - y_p \rangle| \leq M \|y - y_p\|. \quad \square$$

Démonstration de (c) \implies (d). – Quitte à extraire une sous-suite de (f_{ε_p}) , on peut supposer que (f_{ε_p}) converge faiblement vers un élément $u \in L^2(\partial\Omega)$. Pour $w \in \Omega$ fixé, la formule de Cauchy appliquée au chemin γ_ε donne

$$f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - w} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} f_\varepsilon(\gamma(s)) \frac{\gamma'_\varepsilon(s)}{\gamma_\varepsilon(s) - w} ds$$

Pour $\varepsilon = \varepsilon_p$, ceci peut s'interpréter comme un produit scalaire $\langle f_{\varepsilon_p}, g_p \rangle$ où (f_{ε_p}) converge faiblement vers u et où (g_p) converge uniformément (donc en norme L^2) vers $s \mapsto \overline{H}(w, \gamma(s))$. A la limite, on obtient par conséquent

$$f(w) = \langle u, \overline{H}(w, \bullet) \rangle = \mathbb{H}u(w),$$

soit $f = \mathbb{H}u$. En outre, si (a) est vérifié, on peut prendre $u = f_0$ dans (c), donc $f = \mathbb{H}f_0$. \square

Définition 2.3. – L'ensemble des applications $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ vérifiant l'une des propriétés équivalentes 2.1 (a), (b), (c), (d), muni de la norme $\|f\|_2 = \|f_0\|_2$, est noté $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$.

L'application $f \mapsto f_0$ définit donc une isométrie de $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ sur un sous-espace $\mathcal{H}_0^2(\partial\Omega)$ de l'espace de Hilbert $L^2(\partial\Omega)$. La formule $f = \mathbb{H}f_0$ implique $f_0 = \mathbb{H}_0 f_0$ pour tout $f_0 \in \mathcal{H}_0^2(\partial\Omega)$, et comme $\mathbb{H}_0 u = (\mathbb{H}u)_0 \in \mathcal{H}_0^2(\partial\Omega)$ pour tout $u \in L^2(\partial\Omega)$ on voit que l'opérateur

$$\mathbb{H}_0 : L^2(\partial\Omega) \longrightarrow \mathcal{H}_0^2(\partial\Omega)$$

est un projecteur continu. Il en résulte que $\mathcal{H}_0^2(\partial\Omega) = \text{Ker}(1 - \mathbb{H}_0)$ est un sous-espace fermé de $L^2(\partial\Omega)$. Pour simplifier les notations, on conviendra dans la suite d'identifier $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ et son image $\mathcal{H}_0^2(\partial\Omega)$, une fonction $f \in \mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ et sa limite au bord f_0 , l'opérateur \mathbb{H} et sa limite au bord \mathbb{H}_0 .

Exemple 2.4. – Si $\Omega = \mathbb{D}$, les calculs faits en 1.4 donnent pour tout $u \in L^2(\partial\Omega)$:

$$u(e^{is}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{u}(n) e^{ins}, \quad \mathbb{H}u(e^{is}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \widehat{u}(n) e^{ins}.$$

La transformation de Fourier donne donc un isomorphisme $L^2(\partial\mathbb{D}) \simeq l^2(\mathbb{Z})$ par lequel $\mathcal{H}^2(\partial\mathbb{D})$ s'identifie au sous-espace $l^2(\mathbb{N})$ des fonctions dont les coefficients de Fourier $\widehat{u}(n)$, $n < 0$, sont nuls. Dans ce cas, \mathbb{H} est la projection orthogonale $l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow l^2(\mathbb{N})$. \square

Dans le cas général, une condition nécessaire pour qu'une fonction u de $L^2(\partial\Omega)$ soit dans $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ est que $\int_{\partial\Omega} u(z)f(z)dz = 0$ pour toute fonction $f \in \mathcal{H}^2(\partial\Omega)$, en particulier pour $f(z) = z^n$, $n \geq 0$. Ceci résulte du théorème de Cauchy appliqué sur γ_ε lorsque ε tend vers 0, compte tenu du fait que $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ et $f_\varepsilon \rightarrow f_0$ dans L^2 . Comme nous le verrons plus loin, le projecteur \mathbb{H} n'est orthogonal que si Ω est un disque.

Théorème 2.5. – L'ensemble des fonctions holomorphes sur un voisinage de $\overline{\Omega}$ est dense dans $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$.

Démonstration. – Si $f \in \mathcal{H}^2(\partial\Omega)$, on a la représentation de Cauchy

$$f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{f_0(\gamma(s))}{\gamma(s) - w} \gamma'(s) ds.$$

Soit, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $\tilde{\gamma}_\varepsilon(s) = \gamma(s) - \varepsilon i \gamma'(s)$ la courbe des points de $\mathbb{C}\Omega$ situés à la distance ε de $\partial\Omega$. Il est clair que

$$\tilde{f}_\varepsilon(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{f_0(\gamma(s))}{\tilde{\gamma}_\varepsilon(s) - w} \gamma'(s) ds$$

est holomorphe sur l'ouvert des points situés à une distance $< \varepsilon$ de $\overline{\Omega}$. Des calculs analogues à ceux faits dans la démonstration du théorème 1.5 montrent que \tilde{f}_ε converge vers f dans $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$: on vérifie d'abord le résultat pour $\Omega = \mathbb{D}$; on voit ensuite que $(\tilde{f}_\varepsilon)|_{\partial\Omega}$ converge dans $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ par un développement de Taylor du noyau, et la limite est f dans $\mathcal{O}(\Omega)$. \square

3. Adjoint de l'opérateur \mathbb{H} .

Si I est un intervalle fermé borné de \mathbb{R} et si \mathbb{K} est l'opérateur sur $L^2(I)$ associé à un noyau $K \in L^2(I \times I)$, il est facile de voir que l'opérateur adjoint \mathbb{K}^* est défini par le noyau

$$K^*(t, s) = \overline{K}(s, t).$$

Cette formule ne peut toutefois être appliquée directement à \mathbb{H} , car le noyau H ne se prolonge pas en un élément de $L^2(\partial\Omega \times \partial\Omega)$ ni même de $L^1(\partial\Omega \times \partial\Omega)$. Pour contourner cette difficulté, on cherche à évaluer l'opérateur différence $\mathbb{H}^* - \mathbb{H}$, qui, comme on le verra plus loin, a le mérite d'être associé à un vrai noyau. On considère les opérateurs approchés $\mathbb{H}_\varepsilon, \mathbb{H}_\varepsilon^*$ définis par les noyaux continus

$$H_\varepsilon(w, z) = \frac{1}{2i\pi} \frac{\tau(z)}{z - w - \varepsilon i \tau(w)},$$

$$H_\varepsilon^*(w, z) = \overline{H}_\varepsilon(z, w) = \frac{1}{2i\pi} \frac{\overline{\tau}(w)}{\overline{z} - \overline{w} - \varepsilon i \overline{\tau}(z)},$$

et l'opérateur différence $\mathbb{A}_\varepsilon = \mathbb{H}_\varepsilon^* - \mathbb{H}_\varepsilon$ associé au noyau

$$A_\varepsilon(w, z) = \frac{1}{2i\pi} \frac{(z - w)\overline{\tau}(w) - (\overline{z} - \overline{w})\tau(z)}{(z - w - \varepsilon i \tau(w))(\overline{z} - \overline{w} - \varepsilon i \overline{\tau}(z))}.$$

Pour $z = \gamma(s), w = \gamma(t)$ assez voisins, on voit comme dans 1.5 qu'il existe des fonctions $\varphi_j \in C^{k-2}(\partial\Omega \times \partial\Omega)$ telles que

$$z - w = (s - t)\gamma'(t) + (s - t)^2\varphi_1(t, s),$$

$$|z - w|^2 = (s - t)^2[1 + (s - t)\varphi_2(t, s)].$$

En substituant $\gamma'(t) = \tau(w)$ et $(s-t)^2$ en fonction de $|z-w|^2$ dans la première ligne, il vient

$$z - w = (s-t)\tau(w) + |z-w|^2\varphi_3(w, z).$$

En échangeant les rôles de z et w , on obtient

$$\begin{aligned} z - w &= (s-t)\tau(z) - |z-w|^2\varphi_3(z, w), \quad \text{d'où} \\ A_\varepsilon(w, z) &= \frac{|z-w|^2 A(w, z)}{(z-w - \varepsilon i\tau(w))(\bar{z} - \bar{w} - \varepsilon i\bar{\tau}(z))} \quad \text{avec} \\ A(w, z) &= \frac{1}{2i\pi} (\varphi_3(w, z)\bar{\tau}(w) + \bar{\varphi}_3(z, w)\tau(z)). \end{aligned}$$

On obtient $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon(w, z) = A(w, z)$ pour $w \neq z$, avec $A(w, z) \in C^{k-2}(\partial\Omega \times \partial\Omega)$, et de plus on a une majoration uniforme $|A_\varepsilon(w, z)| \leq C|A(w, z)|$. Ceci entraîne que \mathbb{A}_ε converge en norme vers l'opérateur \mathbb{A} de noyau A . Pour tout $u, v \in L^2(\partial\Omega)$ on obtient donc

$$\langle \mathbb{H}u, v \rangle = \lim \langle \mathbb{H}_\varepsilon u, v \rangle = \lim \langle u, \mathbb{H}_\varepsilon^* v \rangle = \lim \langle u, \mathbb{H}_\varepsilon v + \mathbb{A}_\varepsilon v \rangle = \langle u, (\mathbb{H} + \mathbb{A})v \rangle$$

ce qui prouve bien que $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} + \mathbb{A}$. On a d'autre part

$$\begin{aligned} \varphi_3(w, w) &= \varphi_1(t, t) = \frac{1}{2}\gamma''(t), \quad \text{d'où} \\ A(w, w) &= \frac{1}{4i\pi} (\gamma''(t)\bar{\gamma}'(t) + \bar{\gamma}''(t)\gamma'(t)) = \frac{1}{4i\pi} \frac{d}{dt} |\gamma'(t)|^2 = 0 \end{aligned}$$

car $|\gamma'(t)| = 1$. On peut donc énoncer:

Théorème 3.1. – *L'opérateur $\mathbb{A} = \mathbb{H}^* - \mathbb{H}$ est associé à un noyau $A \in C^{k-2}(\partial\Omega \times \partial\Omega)$ défini par*

$$A(w, z) = \frac{1}{2i\pi} \left(\frac{\bar{\tau}(w)}{\bar{z} - \bar{w}} - \frac{\tau(z)}{z - w} \right), \quad w, z \in \partial\Omega.$$

Ce noyau A est antisymétrique, c'est-à-dire que $\bar{A}(z, w) = -A(w, z)$, et de plus $A(w, w) \equiv 0$.

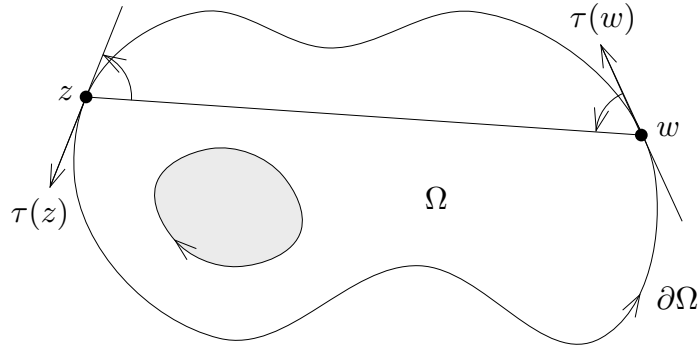
Pour que le projecteur \mathbb{H} soit orthogonal, il faut et il suffit que $\mathbb{H}^* = \mathbb{H}$, ce qui équivaut à dire que $A \equiv 0$.

Corollaire 3.2. – *Le projecteur \mathbb{H} est orthogonal si et seulement si Ω est un disque.*

Démonstration. – Si $A \equiv 0$, on a nécessairement

$$\text{angle}([z, w], \tau(z)) = -\text{angle}([z, w], \tau(w)) \quad \forall w, z \in \partial\Omega,$$

car les membres de gauche et de droite représentent les arguments respectifs des termes $\tau(z)/(z-w)$ et $\bar{\tau}(w)/(\bar{z}-\bar{w})$ intervenant dans $A(w, z)$.



En déplaçant la corde $[z, w]$ parallèlement à une direction fixée, on en déduit que $\partial\Omega$ doit être invariant par symétrie autour de la médiatrice de chacune de ses cordes. Considérons deux cordes faisant entre elles un angle irrationnel, et le point d'intersection P de leurs médiatrices. Les deux symétries correspondantes engendrent un groupe dense de rotations de centre P . Comme $\partial\Omega$ est fermé, $\partial\Omega$ est nécessairement une réunion de cercles de centre P , à savoir un cercle si Ω est un disque, ou deux cercles si Ω est une couronne. Mais une couronne n'est invariante que par les symétries autour des médiatrices des cordes dont les extrémités sont sur un même cercle. Par conséquent Ω est un disque. \square

4. Noyau de Szegö.

Le *projecteur de Szegö* est par définition le projecteur orthogonal \mathbb{S} de $L^2(\partial\Omega)$ sur $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$. On cherche ici à montrer que \mathbb{S} est, en un certain sens, associé à un noyau S . Rappelons que \mathbb{H} est orthogonal dans le cas du disque, par suite $\mathbb{S}^{\mathbb{D}} = \mathbb{H}^{\mathbb{D}}$.

Soit $(\psi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$. L'image d'une fonction $u \in L^2(\partial\Omega)$ par le projecteur \mathbb{S} est alors donnée par la série L^2 -convergente

$$\mathbb{S}u(w) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \langle u, \psi_j \rangle \psi_j(w) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \psi_j(w) \int_{\partial\Omega} u(z) \bar{\psi}_{j,0}(z) ds,$$

où $\psi_{j,0}$ désigne la limite au bord de ψ_j . Ceci suggère d'introduire le noyau

$$S(w, z) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \psi_j(w) \bar{\psi}_j(z), \quad w, z \in \Omega,$$

qui sera appelé *noyau de Szegö* de Ω .

Lemme 4.1. – *La série $\sum_{j \in \mathbb{N}} |\psi_j(w)|^2$ converge uniformément sur tout compact de Ω . Le noyau $S(w, z)$ est de classe C^∞ sur $\Omega \times \Omega$, holomorphe en w et antiholomorphe en z . De plus, on a la majoration*

$$S(w, z) = \sum_{j \in \mathbb{N}} |\psi_j(w)|^2 \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|z - w|^2} ds.$$

Démonstration. – Comme $\psi_j \in \mathcal{H}^2(\partial\Omega)$, on a

$$\psi_j(w) = \mathbb{H}\psi_j(w) = \langle \psi_j, \bar{H}(w, \bullet) \rangle = \langle \psi_j, \mathbb{S}\bar{H}(w, \bullet) \rangle.$$

Par conséquent, $(\psi_j(w))$ est la suite des coordonnées de la fonction $\mathbb{S}\overline{H}(w, \bullet)$ dans la base (ψ_j) , ce qui donne

$$\sum_j |\psi_j(w)|^2 = \|\mathbb{S}\overline{H}(w, \bullet)\|^2 \leq \|H(w, \bullet)\|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|z-w|^2} ds.$$

L'application $w \mapsto \overline{H}(w, \bullet)$ étant continue de Ω dans $L^2(\partial\Omega)$, on voit que la fonction $w \mapsto \|\mathbb{S}H(w, \bullet)\|^2$ est continue sur Ω . Le lemme de Dini entraîne alors la convergence uniforme sur tout compact de la série de fonctions continues $\sum |\psi_j(w)|^2$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que pour N tendant vers $+\infty$,

$$\left(\sum_{j \geq N} |\psi_j(w) \overline{\psi_j(z)}| \right)^2 \leq \sum_{j \geq N} |\psi_j(w)|^2 \sum_{j \geq N} |\psi_j(z)|^2$$

converge uniformément vers 0 lorsque (w, z) décrit un compact quelconque de $\Omega \times \Omega$. Comme $\sum \psi_j(w) \overline{\psi_j(z)}$ est une série de fonctions holomorphes en (w, \bar{z}) , on en déduit que S est holomorphe en (w, \bar{z}) , en particulier de classe C^∞ sur $\Omega \times \Omega$. \square

Lemme 4.2. – Pour $w \in \Omega$ fixé et pour ε tendant vers 0, la fonction

$$S_\varepsilon(w, \bullet) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \psi_j(w) \overline{\psi_{j,\varepsilon}}$$

converge vers $S_0(w, \bullet) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \psi_j(w) \overline{\psi_{j,0}}$ dans $L^2(\partial\Omega)$. De plus

$$\mathbb{S}u(w) = \int_{\partial\Omega} S_0(w, z) u(z) ds, \quad \forall u \in L^2(\partial\Omega).$$

Démonstration. – Comme $\mathbb{H} : L^2(\partial\Omega) \rightarrow \mathcal{O}(\Omega)$ est continu, \mathbb{H} envoie une série L^2 -convergente sur une série de fonctions holomorphes convergeant uniformément sur tout compact, d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{H}\left(\sum_{j \in \mathbb{N}} \overline{\psi_j(w)} \psi_{j,0}\right) &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \overline{\psi_j(w)} \mathbb{H}\psi_{j,0} = \sum_{j \in \mathbb{N}} \overline{\psi_j(w)} \psi_j = \overline{S(w, \bullet)}, \\ \mathbb{H}_\varepsilon\left(\sum_{j \in \mathbb{N}} \overline{\psi_j(w)} \psi_{j,0}\right) &= \overline{S_\varepsilon(w, \bullet)}. \end{aligned}$$

Le théorème 1.5 entraîne que le membre de gauche converge dans $L^2(\partial\Omega)$ vers $\mathbb{H}_0\left(\sum_{j \in \mathbb{N}} \overline{\psi_j(w)} \psi_{j,0}\right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \overline{\psi_j(w)} \psi_{j,0}$ (cet élément est dans $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$). La formule intégrale résulte immédiatement des considérations du début du § 4. \square

L'espace $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ du disque admet la base hilbertienne $(w^n / \sqrt{2\pi})_{n \in \mathbb{N}}$, ce qui donne l'expression

$$S^{\mathbb{D}}(w, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{N}} w^n \overline{z}^n = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1 - w\overline{z}}, \quad \forall (w, z) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}.$$

On voit que $S_0^{\mathbb{D}}(w, z)$ coïncide bien avec $H^{\mathbb{D}}(w, z)$ pour $(w, z) \in \mathbb{D} \times \partial\mathbb{D}$.

5. Formule intégrale reliant S et H .

L'idée centrale introduite par N. Kerzman est que l'on peut retrouver le projecteur orthogonal \mathbb{S} à partir du projecteur oblique \mathbb{H} (qui est connu explicitement). Comme \mathbb{S} et \mathbb{H} coïncident avec l'application identique sur $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$, on a en effet

$$\mathbb{S}\mathbb{H} = \mathbb{H}, \quad \mathbb{H}\mathbb{S} = \mathbb{S}.$$

Prenons les adjoints dans la seconde égalité. Comme $\mathbb{S}^* = \mathbb{S}$, on trouve $\mathbb{S}\mathbb{H}^* = \mathbb{S}$. Soustrayons maintenant la première égalité et introduisons l'opérateur $\mathbb{A} = \mathbb{H}^* - \mathbb{H}$. Il vient

$$\mathbb{S}\mathbb{A} = \mathbb{S}\mathbb{H}^* - \mathbb{S}\mathbb{H} = \mathbb{S} - \mathbb{H},$$

soit encore $\mathbb{S}(1 - \mathbb{A}) = \mathbb{H}$.

Lemme 5.1. – *L'opérateur $1 - \mathbb{A}$ est un isomorphisme de $L^2(\partial\Omega)$ et on a $\|(1 - \mathbb{A})^{-1}\| \leq 1$.*

Démonstration. – Comme \mathbb{A} est antisymétrique, le produit scalaire $\langle \mathbb{A}u, u \rangle$ est purement imaginaire pour tout $u \in L^2(\partial\Omega)$, ce qui implique

$$\|u\|_2^2 \leq |\langle (1 - \mathbb{A})u, u \rangle| \leq \|(1 - \mathbb{A})u\|_2 \|u\|_2$$

et en particulier $\|(1 - \mathbb{A})u\|_2 \geq \|u\|_2$. L'opérateur $1 - \mathbb{A}$ est donc injectif et d'image fermée. L'orthogonal de $\text{Im}(1 - \mathbb{A})$ est égal au noyau de l'adjoint $(1 - \mathbb{A})^* = 1 + \mathbb{A}$, et cet opérateur est injectif pour les mêmes raisons que précédemment. Par suite $\text{Im}(1 - \mathbb{A}) = L^2(\partial\Omega)$ et $1 - \mathbb{A}$ est donc un isomorphisme topologique de $L^2(\partial\Omega)$. Comme $1 - \mathbb{A}$ accroît la norme de tout vecteur, on voit que $(1 - \mathbb{A})^{-1}$ est contractant. \square

Le lemme montre qu'on peut calculer \mathbb{S} à partir de \mathbb{H} par la formule

$$\mathbb{S} = \mathbb{H}(1 - \mathbb{A})^{-1}.$$

C'est cette idée qu'on va exploiter dans la suite pour évaluer le noyau de Szegö S , en établissant une formule intégrale reliant S et H .

Pour tout $u \in L^2(\partial\Omega)$ et $w \in \Omega$, on a en effet

$$\mathbb{S}\mathbb{A}u(w) = \int_{\partial\Omega} S_0(w, \xi) \mathbb{A}u(\xi) ds(\xi) = \int_{\partial\Omega} S_0(w, \xi) ds(\xi) \int_{\partial\Omega} A(\xi, z) u(z) ds(z).$$

Le théorème de Fubini montre que $\mathbb{S}\mathbb{A}$ est associé au noyau

$$\Omega \times \partial\Omega \ni (w, z) \longmapsto \int_{\partial\Omega} S_0(w, \xi) A(\xi, z) ds(\xi).$$

L'égalité $\mathbb{S} = \mathbb{H} + \mathbb{S}\mathbb{A}$ fournit alors l'égalité de noyaux:

Formule 5.2. – *Pour tous $(w, z) \in \Omega \times \partial\Omega$ on a*

$$S_0(w, z) = H(w, z) + \int_{\partial\Omega} S_0(w, \xi) A(\xi, z) ds(\xi).$$

6. Régularité au bord du noyau de Szegö.

Nous nous proposons ici de montrer que S s'étend en une fonction de classe C^{k-2} sur $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ en dehors de la diagonale $\Delta_{\partial\Omega}$ de $\partial\Omega \times \partial\Omega$. On utilise pour cela la relation $\mathbb{S} = \mathbb{H} + \mathbb{S}\mathbb{A}$ démontrée au §5, ce qui donne

$$\begin{aligned}\mathbb{S} &= \mathbb{H} + (\mathbb{H} + \mathbb{S}\mathbb{A})\mathbb{A} = \mathbb{H}(\mathbb{H} + \mathbb{A}) + \mathbb{S}\mathbb{A}^2 = \mathbb{H}\mathbb{H}^* + \mathbb{S}\mathbb{A}^2, \\ \mathbb{S}\mathbb{A} &= \mathbb{S} - \mathbb{H} = (\mathbb{S} - \mathbb{H}^*)^* = (\mathbb{S} - \mathbb{H} - \mathbb{A})^* = (\mathbb{S}\mathbb{A} - \mathbb{A})^* = \mathbb{A} - \mathbb{A}\mathbb{S}.\end{aligned}$$

La deuxième égalité implique $\mathbb{S}\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^2 - \mathbb{A}\mathbb{S}\mathbb{A}$, d'où

$$(6.1) \quad \mathbb{S} = \mathbb{H}\mathbb{H}^* + \mathbb{A}^2 - \mathbb{A}\mathbb{S}\mathbb{A}.$$

Comme $A \in C^{k-2}(\partial\Omega \times \partial\Omega)$, il est clair que \mathbb{A}^2 possède un noyau de classe C^{k-2} sur $\partial\Omega \times \partial\Omega$. L'opérateur $\mathbb{S}\mathbb{A}$ est associé au noyau $\mathbb{S}\mathbb{A}(\bullet, z)$ et $\mathbb{A}\mathbb{S}\mathbb{A}$ au noyau

$$\int_{\partial\Omega} A(w, \bullet) \mathbb{S}\mathbb{A}(\bullet, z) ds = \langle A(w, \bullet), \overline{\mathbb{S}\mathbb{A}(\bullet, z)} \rangle.$$

Les applications $w \mapsto A(w, \bullet)$ et $z \mapsto A(\bullet, z)$ sont dans $C^{k-2}(\partial\Omega, L^2(\partial\Omega))$. Il en est de même pour l'application $z \mapsto \mathbb{S}\mathbb{A}(\bullet, z)$, puisque \mathbb{S} est un opérateur continu sur $L^2(\partial\Omega)$, donc $\mathbb{A}\mathbb{S}\mathbb{A}$ a lui aussi un noyau dans $C^{k-2}(\partial\Omega \times \partial\Omega)$. Il reste à étudier le noyau de $\mathbb{H}\mathbb{H}^*$.

Lemme 6.2. – *La fonction*

$$G(w, z) = \int_{\partial\Omega} H(w, \xi) \overline{H(z, \xi)} ds(\xi) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\partial\Omega} \frac{ds(\xi)}{(\xi - w)(\overline{\xi} - \overline{z})}, \quad (w, z) \in \Omega \times \Omega$$

se prolonge en une fonction $G \in C^{k-2}(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \setminus \Delta_{\partial\Omega})$, et l'opérateur défini par $G|_{\Omega \times \partial\Omega}$ est $\mathbb{G} = \mathbb{H}\mathbb{H}^*$.

Avant de démontrer le lemme 6.2, nous aurons besoin d'un résultat préliminaire généralisant le théorème 1.5 (b).

Lemme 6.3. – *Soit E une partie ouverte ou un domaine à bord de classe C^1 dans \mathbb{R}^n . Soit $u : \partial\Omega \times E \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue.*

(a) *Si u est de classe C^q , $1 \leq q \leq k$, alors la transformée $\mathbb{H}u$ définie par*

$$\mathbb{H}u(w, x) = \int_{\partial\Omega} H(w, z) u(z, x) ds(z), \quad (w, x) \in \Omega \times E$$

se prolonge en une fonction de classe C^{q-1} sur $\overline{\Omega} \times E$.

(b) *Si u est de classe C^q , $0 \leq q \leq k$ et si $u(\bullet, x) \in \mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ pour tout $x \in \Omega$, alors $\mathbb{H}u$ se prolonge en une fonction de classe C^q sur $\overline{\Omega} \times E$.*

Démonstration. – (a) Grâce à la formule 1.3 suivie d'une dérivation sous le signe somme en x , on obtient

$$\frac{\partial^l}{\partial x^l} \frac{\partial^m}{\partial w^m} \mathbb{H}u(w, x) = \mathbb{H} \left(\frac{\partial^l}{\partial x^l} \frac{\partial^m}{\partial z^m} u(z, x) \right),$$

de sorte qu'il suffit de regarder le cas $q = 1$. La démonstration du théorème 1.5 montre que \mathbb{H} est continu de $C^1(\partial\Omega)$ dans $C^0(\overline{\Omega})$. On en déduit

$$\|\mathbb{H}u(\bullet, x) - \mathbb{H}u(\bullet, x_0)\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leq C\|u(\bullet, x) - u(\bullet, x_0)\|_{C^1(\partial\Omega)}$$

et le second membre tend vers 0 quand x tend vers x_0 dans E . On sait d'autre part que $w \mapsto H(w, x)$ s'étend continument à $\overline{\Omega}$ pour tout $x \in E$ fixé. Ceci entraîne facilement la continuité de $\mathbb{H}u$ sur $\overline{\Omega} \times E$ grâce à l'inégalité triangulaire

$$|\mathbb{H}u(w, x) - \mathbb{H}u(w_0, x_0)| \leq |\mathbb{H}u(w, x) - \mathbb{H}u(w, x_0)| + |\mathbb{H}u(w, x_0) - \mathbb{H}u(w_0, x_0)|.$$

(b) On est facilement ramené au cas $q = 0$, à condition de vérifier que toutes les dérivées de u en (z, x) d'ordre inférieur ou égal à q sont encore dans $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$. Par récurrence, il suffit de vérifier ce résultat pour u'_x et u'_z . Pour u'_x , on observe simplement que

$$u'_x(\bullet, x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(\bullet, x) - u(\bullet, x_0)}{x - x_0} \quad \text{dans } \mathcal{H}^2(\partial\Omega).$$

D'autre part, la fonction holomorphe $v = \mathbb{H}u(\bullet, x)$ est continue sur $\overline{\Omega}$ d'après (a), et vérifie par hypothèse $v|_{\partial\Omega} = u(\bullet, x)$. Comme $v' = \mathbb{H}u'_z$, le théorème 1.5 montre que $(v')_\varepsilon$ converge vers $\mathbb{H}_0 u'_z$ dans $L^2(\partial\Omega)$, et par suite dans $L^1(\partial\Omega)$. Pour tout arc $\widehat{ab} \subset \partial\Omega$ on obtient donc

$$\begin{aligned} \int_a^b (\mathbb{H}_0 u'_z)(w, x) dw &= \lim \int_a^b (v')_\varepsilon(w) dw = \lim v(b + \varepsilon i\tau(b)) - v(a + \varepsilon i\tau(a)) \\ &= v(b) - v(a) = u(b, x) - u(a, x) \end{aligned}$$

donc $\mathbb{H}_0 u'_z = u'_z$ et $u'_z(\bullet, x) \in \mathcal{H}^2(\partial\Omega)$. Comme dans (a), le cas $q = 0$ se réduit à voir que \mathbb{H} envoie $C^0(\partial\Omega) \cap \mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ dans $C^0(\overline{\Omega})$, continument par rapport aux normes uniformes. Si $\Omega = \mathbb{D}$, ceci résulte du fait que $\mathbb{H}u$ est, pour $u \in C^0(\partial\mathbb{D}) \cap \mathcal{H}^2(\partial\mathbb{D})$, la solution du problème de Dirichlet (cf. W. Rudin). Le cas général résulte de l'écriture $\mathbb{H}_\varepsilon = \mathbb{H}_\varepsilon^{\mathbb{D}} + \mathbb{R}_\varepsilon$ obtenue dans la démonstration du théorème 1.5. \square

Démonstration du lemme 6.2. – Soit (θ_j) une partition de l'unité de classe C^k sur $\partial\Omega$, et $T_j = \text{Supp } \theta_j$. Ecrivons $G = \sum G_j$ avec

$$G_j(w, z) = \int_{\partial\Omega} H(w, \xi) \overline{H(z, \xi)} \theta_j(\xi) ds(\xi),$$

c'est-à-dire $G_j(\bullet, z) = \mathbb{H}(\overline{H}(\bullet, z)\theta_j)$. Comme $\overline{H(z, \xi)}\theta_j(\xi)$ est de classe C^{k-1} pour $(\xi, z) \in \partial\Omega \times (\overline{\Omega} \setminus T_j)$, le lemme 6.3 (a) montre que G_j est de classe C^{k-2} sur $\overline{\Omega} \times (\overline{\Omega} \setminus T_j)$, et donc aussi sur $(\overline{\Omega} \setminus T_j) \times \overline{\Omega}$ après conjugaison et échange des rôles de w, z . Par conséquent $G_j \in C^{k-2}(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \setminus T_j \times T_j)$, et $G = \sum G_j$ est de classe C^{k-2} sur $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ en dehors de $\bigcup_j T_j \times T_j$, qui est un voisinage arbitrairement petit de $\Delta_{\partial\Omega}$ si les diamètres des T_j sont choisis assez petits.

Pour tout $u \in L^2(\partial\Omega)$, on a d'autre part

$$\mathbb{H}\mathbb{H}^* u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{H}\mathbb{H}_\varepsilon^* u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{G}_\varepsilon u,$$

où \mathbb{G}_ε est l'opérateur associé au noyau

$$G_\varepsilon(w, z) = \int_{\partial\Omega} H(w, \xi) \overline{H_\varepsilon(z, \xi)} ds(\xi) = G(w, z + \varepsilon i\tau(z)).$$

Comme ce noyau converge vers $G_{|\Omega \times \partial\Omega}$ uniformément sur tout compact, on en déduit bien $\mathbb{H}\mathbb{H}^* = \mathbb{G}$. \square

Théorème 6.4. – *Le noyau de Szegö $S(w, z)$ se prolonge en une fonction dans $C^{k-2}(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \setminus \Delta_{\partial\Omega})$, et plus précisément, en la somme du noyau G et d'une fonction de classe C^{k-2} sur $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$. Quand $z \in \Omega$ tend vers le bord $\partial\Omega$, on a*

$$S(z, z) \sim \frac{1}{4\pi^2} \int_{\partial\Omega} \frac{ds(\xi)}{|\xi - z|^2} \sim \frac{1}{4\pi d(z, \partial\Omega)}.$$

Démonstration. – Considérons le noyau $K(w, z) = S_0(w, z) - G_0(w, z)$ sur $\Omega \times \partial\Omega$, associé à l'opérateur

$$\mathbb{S} - \mathbb{H}\mathbb{H}^* = \mathbb{A}^2 - \mathbb{A}\mathbb{S}\mathbb{A} : L^2(\partial\Omega) \longrightarrow \mathcal{H}^2(\partial\Omega).$$

On sait que cet opérateur est défini par un noyau $K_0 \in C^{k-2}(\partial\Omega \times \partial\Omega)$, ce qui implique $K_0(\bullet, z) \in \mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ pour tout z et $K = \mathbb{H}K_0$. Le lemme 6.3 (b) donne alors $K \in C^{k-2}(\overline{\Omega} \times \partial\Omega)$. Par échange de w, z on voit que $(S(\bullet, z) - G(\bullet, z))_0$ est de classe C^{k-2} sur $\partial\Omega \times \overline{\Omega}$, et une nouvelle application du lemme 6.3 (b) donne $S - G \in C^{k-2}(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$. On en déduit en particulier

$$S(z, z) \sim G(z, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\partial\Omega} \frac{ds(\xi)}{|\xi - z|^2}$$

quand z tend vers $\partial\Omega$. Soit $\delta = d(z, \partial\Omega)$ et $\gamma(t)$ le point de $\partial\Omega$ tel que $|z - \gamma(t)| = \delta$. Le point z est sur la normale à $\partial\Omega$ au point $\gamma(t)$, donc $z = \gamma(t) + \delta i\gamma'(t)$. Quand δ et $|s - t|$ tendent vers 0, on a

$$\gamma(s) - z = \gamma(s) - \gamma(t) - \delta i\gamma'(t) = \gamma'(t)(s - t - i\delta + O((s - t)^2)),$$

par suite $|\gamma(s) - z|^2 \sim (s - t)^2 + \delta^2$ et

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \frac{ds}{|\gamma(s) - z|^2} &\sim \int_{|s-t| < \delta^{1/3}} \frac{ds}{(s-t)^2 + \delta^2} + \int_{|s-t| > \delta^{1/3}} \frac{ds}{|\gamma(s) - z|^2} \\ &= \frac{2}{\delta} \arctan(\delta^{-2/3}) + O(\delta^{-2/3}) \sim \frac{\pi}{\delta}. \end{aligned} \quad \square$$

7. Relation avec l'application conforme de Riemann.

On suppose ici que Ω est un ouvert simplement connexe à frontière de classe C^k , $k \geq 2$. Pour tout point $a \in \Omega$ fixé, il existe alors une unique application conforme bijective

$$R : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$$

telle que $R(a) = 0$ et $R'(a) > 0$.

Théorème 7.1. – *L'application R s'étend en un difféomorphisme de classe C^{k-1} de $\overline{\Omega}$ sur $\overline{\mathbb{D}}$.*

La démonstration de ce théorème sera donnée plus loin. Nous admettons le résultat provisoirement. Le changement de variable $z = R(w)$ donne alors

$$\int_{\partial\mathbb{D}} |u(z)|^2 |dz| = \int_{\partial\Omega} |u \circ R(w)|^2 |R'(w)| |dw|$$

pour toute fonction $u \in L^2(\partial\Omega)$. On voit donc qu'on a une isométrie

$$\begin{aligned} L^2(\partial\mathbb{D}) &\longrightarrow L^2(\partial\Omega) \\ u &\longmapsto u \circ R (R')^{1/2} \end{aligned}$$

où $(R')^{1/2}$ est la détermination de la racine carrée complexe telle que $R'(a)^{1/2} > 0$ (on notera que R' ne s'annule pas sur Ω). L'isométrie envoie $H(\mathbb{D}) \cap C^0(\overline{\mathbb{D}})$ sur $\mathcal{O}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ et, par densité (théorème 2.5), elle envoie donc $\mathcal{H}^2(\partial\mathbb{D})$ sur $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$. Si (ψ_j) est une base orthonormée de $\mathcal{H}^2(\partial\mathbb{D})$, on en déduit que $(\psi_j \circ R (R')^{1/2})$ est une base orthonormée de $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$. Par conséquent

$$\begin{aligned} S(w, z) &= S^{\mathbb{D}}(R(w), R(z)) R'(w)^{1/2} \overline{R'(z)^{1/2}}, \\ S(w, z) &= \frac{1}{2\pi} \frac{R'(w)^{1/2} \overline{R'(z)^{1/2}}}{1 - R(w)\overline{R(z)}}. \end{aligned}$$

En substituant $z = a$, $R(a) = 0$, on obtient en particulier

$$S(w, a) = \frac{1}{2\pi} R'(w)^{1/2} R'(a)^{1/2}, \quad S(a, a) = \frac{1}{2\pi} R'(a),$$

d'où on déduit aussitôt les

Formules 7.2. – *L'application conforme R et sa dérivée sont données par*

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad R'(w) &= 2\pi \frac{S(w, a)^2}{S(a, a)}, \quad \forall w \in \overline{\Omega}, \\ \text{(b)} \quad R(w) &= -i\tau(w) \frac{S(w, a)^2}{|S(w, a)|^2}, \quad \forall w \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Démonstration. – La relation (a) est immédiate à partir de ce qui précède. On a par ailleurs $|R(w)|^2 = 1$ sur $\partial\Omega$. En prenant la dérivée d/ds le long de $\partial\Omega$, on voit que $dR(w)/ds = R'(w)dw/ds = R'(w)\tau(w)$ doit être orthogonal à $R(w)$. Quand w tourne dans le sens positif sur $\partial\Omega$, il en est de même pour $R(w)$ sur $\partial\mathbb{D}$ (une application holomorphe préserve l'orientation), donc l'argument de $R'(w)\tau(w)$ est égal à celui de $iR(w)$. Ceci donne $iR(w) = R'(w)\tau(w)/|R'(w)|$ et (b) se déduit alors de (a). \square

Il nous reste à démontrer la régularité jusqu'au bord de l'application conforme de Riemann. Pour cela, on va montrer d'abord la régularité analytique lorsque $\partial\Omega$ est réelle

analytique, puis on passera au cas général par un argument d'approximation en norme C^k de $\partial\Omega$.

Lemme 7.3. – Soient Ω_1, Ω_2 des ouverts simplement connexes bornés de \mathbb{C} ayant des frontières \mathbb{R} -analytiques et $F : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ une application biholomorphe. Alors F s'étend en une application biholomorphe d'un voisinage de $\overline{\Omega}_1$ sur un voisinage de $\overline{\Omega}_2$.

Démonstration. – Quitte à remplacer F par $F^{-1} : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$, il suffit de voir que F s'étend holomorphiquement à un voisinage de $\overline{\Omega}_1$. D'après Rudin (théorème 14.19), F se prolonge en un homéomorphisme de $\overline{\Omega}_1$ sur $\overline{\Omega}_2$. Soit $x_1 \in \partial\Omega_1$ un point quelconque et $x_2 = F(x_1) \in \partial\Omega_2$. Au voisinage de x_j , $\partial\Omega_j$ est donné par une courbe \mathbb{R} -analytique $s \mapsto \gamma_j(s)$ définie pour $s \in \mathbb{R}$ voisin de 0. Celle-ci se prolonge en une application holomorphe $\tilde{\gamma}_j$ de la variable $z = s + it$ au voisinage de 0 dans \mathbb{C} . Soit $\Pi^+ = \{z = s + it; t > 0\}$ le demi-plan supérieur. Il existe un disque $U_j \subset \mathbb{C}$ de centre 0 et un voisinage $V_j \subset \mathbb{C}$ de x_j tels que $\tilde{\gamma}_j$ définit un biholomorphisme de $\Pi^+ \cap U_j$ sur $\Omega_j \cap V_j$. Si on choisit en outre V_1 assez petit pour que $F(\Omega_1 \cap V_1) \subset V_2$, on en déduit une application holomorphe $G = \tilde{\gamma}_2^{-1} \circ F \circ \tilde{\gamma}_1 : \Pi^+ \cap U_1 \rightarrow \Pi^+ \cap U_2$ qui se prolonge continument en une application de $\overline{\Pi^+ \cap U_1}$ dans $\overline{\Pi^+ \cap U_2}$ telle que $G(\mathbb{R} \cap U_1) \subset \mathbb{R} \cap U_2$. Le principe de réflexion de Schwarz (W. Rudin, théorème 11.17) montre que G se prolonge en une application holomorphe \tilde{G} de U_1 dans U_2 , d'où un prolongement local $\tilde{F} = \tilde{\gamma}_2 \circ \tilde{G} \circ \tilde{\gamma}_1^{-1}$ de V_1 dans V_2 . \square

Démonstration du théorème 7.1. – Si Ω est à frontière \mathbb{R} -analytique, le lemme 7.3 montre que R est en particulier un C^∞ -difféomorphisme de $\overline{\Omega}$ sur $\overline{\mathbb{D}}$, donc les formules 7.2 sont bien vraies. Si $\partial\Omega$ est seulement de classe C^k , on peut approximer la courbe frontière γ par une courbe \mathbb{R} -analytique obtenue par convolution:

$$\gamma_\delta(s) = \int_{\mathbb{R}} \gamma(t) \exp\left(\frac{-(s-t)^2}{\delta^2}\right) \frac{dt}{\delta\sqrt{2\pi}}.$$

On notera que γ_δ est une fonction ayant la même périodicité que γ et que $\|\gamma_\delta - \gamma\|_{C^k}$ converge vers 0 avec δ . Pour δ assez petit, cette courbe est la frontière d'un ouvert Ω_δ pour lequel on a un noyau de Szegö S_δ et une application de Riemann $R_\delta : \Omega_\delta \rightarrow \mathbb{D}$. D'après ce qui précède, R'_δ est lié à S_δ par la formule 7.2 (a). La démonstration que nous avons donnée de la régularité de S fournit en outre la continuité de l'application $\gamma \mapsto S$, lorsqu'on prend la norme C^k sur l'espace des courbes γ et la norme C^{k-2} pour S (sur un compact de $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ ne rencontrant pas $\Delta_{\partial\Omega}$). Il en résulte que R_δ converge uniformément vers une application holomorphe R_0 qui vérifie encore 7.2 (a). En particulier $R'_0 \in C^{k-2}(\overline{\Omega})$, donc $R_0 \in C^{k-1}(\overline{\Omega})$. De plus R_0 envoie $\partial\Omega$ sur $\partial\mathbb{D}$. Comme une limite d'applications holomorphes injectives est ou bien injective ou bien constante (conséquence du théorème de Rouché), et comme $R_0(a) = 0$, $R'_0(a) = 2\pi S(a, a) > 0$, on en déduit que R_0 coïncide avec l'application conforme $R : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ cherchée. Il reste à démontrer que la dérivée R' ne peut s'annuler en aucun point $z_0 \in \partial\Omega$. Un calcul facile montre que pour $\varepsilon > 0$ assez petit l'image conforme de Ω par l'application $z \mapsto 1/(z - z_0 + \varepsilon i\tau(z_0))$ est strictement convexe au voisinage du point image de z_0 . On peut donc supposer que Ω est convexe au voisinage de z_0 . Dans ce cas, on peut modifier la courbe $\partial\Omega$ en dehors d'un petit voisinage de z_0 de sorte qu'elle soit la frontière $\partial\tilde{\Omega}$ d'un ouvert arbitrairement proche d'un disque en norme C^2 . Alors l'application conforme $\tilde{R} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{D}$ est voisine de l'application identique en norme C^1 , donc \tilde{R} est un C^1 -difféomorphisme jusqu'au bord. Comme $R \circ \tilde{R}^{-1}$ envoie $\partial\mathbb{D}$ sur $\partial\mathbb{D}$ au voisinage de

$\tilde{R}(z_0)$, la démonstration du lemme 7.3 montre que $R \circ \tilde{R}^{-1}$ s'étend en une application biholomorphe au voisinage de $\tilde{R}(z_0)$, par suite $R'(z_0) \neq 0$. \square

Remarque 7.4. – Lorsque $\partial\Omega$ est de classe C^1 , il n'est pas vrai en général que R s'étend en une application de classe C^1 sur $\bar{\Omega}$, et même si c'est le cas, il se peut que la dérivée R' s'annule au bord. Un exemple de cette situation est donné par l'ouvert Ω obtenu en prenant l'image conforme d'un petit disque $\Delta = \{|z - \varepsilon| < \varepsilon\}$ par l'application $Q(z) = z/\log(1/z)$ (resp. $Q(z) = z \log(1/z)$). La frontière de $\partial\Omega$ est de classe C^1 au voisinage de 0 parce que $\log(1/z)$ a un argument qui tend vers 0 quand z tend vers 0 le long de $\partial\Delta$. L'application conforme est donnée par $R = Q^{-1}/\varepsilon - 1$ et on a donc $R'(0) = 1/(\varepsilon Q'(0)) = \infty$ (resp. $R'(0) = 0$). De même, pour $k \geq 2$, on peut vérifier que l'image de Δ par $Q(z) = z + z^k \log \log(1/z)$ a une frontière de classe C^k , mais Q et R ne sont pas de classe C^k au voisinage de 0.

8. Calcul numérique de l'application conforme.

La formule intégrale 5.2 donne

$$S(a, w) = H(a, w) + \int_{\partial\Omega} S(a, z) A(z, w) ds, \quad w \in \partial\Omega.$$

Comme $\overline{A(z, w)} = -A(w, z)$, on trouve après conjugaison:

$$(8.1) \quad S(w, a) + \int_{\partial\Omega} A(w, z) S(z, a) ds = \overline{H(a, w)}, \quad w \in \partial\Omega,$$

ce qui permet d'obtenir $S(w, a)$ en fonction des noyaux H et A explicitement connus. Les formules 7.2 (a), (b) peuvent alors être utilisées pour calculer l'application de Riemann R à partir de S .

Les intégrales $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$ mises en jeu seront évaluées par la méthode des trapèzes relative à une subdivision $t_i = \alpha + ih$, $0 \leq i \leq n$, de pas constant $h = (\beta - \alpha)/n$:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \simeq h \left(f(t_0) + f(t_1) + \dots + f(t_{n-1}) + \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{2} \right).$$

Si f est de classe C^{2l} , l'erreur d'approximation ε est donnée par la formule d'Euler-Mac Laurin

$$\varepsilon = \sum_{m=1}^l \frac{b_{2m} h^{2m}}{(2m)!} (f^{(2m-1)}(\beta) - f^{(2m-1)}(\alpha)) - h^{2l} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{B_{2l}((t - \alpha)/h)}{(2l)!} f^{(2l)}(t) dt,$$

où b_{2m} et B_{2m} sont respectivement les nombres et les polynômes de Bernoulli. Ceci montre que l'erreur est en général de l'ordre de $O(h^2) = O(n^{-2})$. Néanmoins, pour une fonction f périodique de période $\beta - \alpha$ et de classe C^{2l} , l'erreur est majorée par $O(h^{2l})$; dans ce cas, on a en effet $f^{(m)}(\beta) = f^{(m)}(\alpha)$ pour tout m .

Comme les intégrales à évaluer sont des intégrales de fonctions périodiques, la convergence de la méthode des trapèzes est donc extrêmement rapide, tout au moins dans le

cas de fonctions C^∞ . Cette remarque montre que l'on n'a pas intérêt à calculer R par intégration à partir de 7.2 (a), mais plutôt à partir de 7.2 (b) et de la formule de Cauchy

$$R(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{R(z) dz}{z - w}.$$

Supposons donnée une paramétrisation quelconque $[\alpha, \beta] \ni t \mapsto z(t)$ de la courbe $\partial\Omega$. En multipliant (8.1) par $|z'(t)|^{1/2}$ après avoir substitué $w = z(t)$, $z = z(u)$, on obtient la relation équivalente

$$(8.2) \quad \sigma(t) + \int_{\alpha}^{\beta} a(t, u) \sigma(u) du = g(t),$$

avec les notations

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= |z'(t)|^{1/2} S(z(t), a), \\ g(t) &= |z'(t)|^{1/2} \overline{H(a, z(t))}, \\ a(t, u) &= |z'(t)|^{1/2} |z'(u)|^{1/2} A(z(t), z(u)). \end{aligned}$$

Cette écriture a l'avantage de préserver le caractère hermitien antisymétrique du noyau $a(t, u)$. Les fonctions $g(t)$ et $a(t, u)$ sont données par les formules explicites

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2i\pi} \frac{\overline{z'(t)}}{a - z(t)} |z'(t)|^{-1/2}, \\ h(t, u) &= \frac{1}{2i\pi} \frac{z'(u)}{z(u) - z(t)} |z'(t)|^{1/2} |z'(u)|^{-1/2}, \\ a(t, u) &= \begin{cases} \overline{h(u, t)} - h(t, u) & \text{si } t \neq u \\ 0 & \text{si } t = u. \end{cases} \end{aligned}$$

L'utilisation de la méthode des trapèzes conduit à résoudre le système linéaire

$$\sigma(t_i) + h \sum_{0 \leq j < n} a(t_i, t_j) \sigma(t_j) = g(t_i), \quad 0 \leq i < n.$$

Ce système est de rang n , car la matrice antisymétrique $(a(t_i, t_j))$ a toutes ses valeurs propres imaginaires. La résolution du système fournit les valeurs $\sigma(t_j)$ cherchées, par exemple à l'aide de la méthode d'élimination de Gauss. Dans cette situation, il existe en fait des schémas de résolution itératifs plus efficaces (voir M.R. Trummer). Une fois les valeurs $\sigma(t_j)$ connues, on obtient

$$R(z(t_j)) = -i \frac{z'(t_j)}{|z'(t_j)|} \frac{\sigma(t_j)^2}{|\sigma(t_j)|^2},$$

et une intégration approchée de la formule de Cauchy donne

$$(8.3) \quad R(w) \simeq \frac{h}{2i\pi} \sum_{0 \leq j < n} \frac{z'(t_j)}{z(t_j) - w} R(z(t_j)).$$

Tous ces calculs sont immédiats dès lors que la fonction $z(t)$ et sa dérivée $z'(t)$ sont connues aux points $t = t_j$. L'application de Riemann inverse

$$Q = R^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow \Omega, \quad Q(0) = a,$$

peut être évaluée comme suit. La formule des résidus implique

$$Q'(w) = \frac{1}{R'(R^{-1}(w))} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{dz}{R(z) - w},$$

$$Q(w) = a + \int_0^w Q'(v) dv = a - \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} \log(1 - w\overline{R(z)}) dz.$$

L'approximation des trapèzes fournit alors

$$(8.4) \quad Q(w) \simeq a - \frac{h}{2i\pi} \sum_{0 \leq j < n} \log(1 - w\overline{R(z(t_j))}) z'(t_j).$$

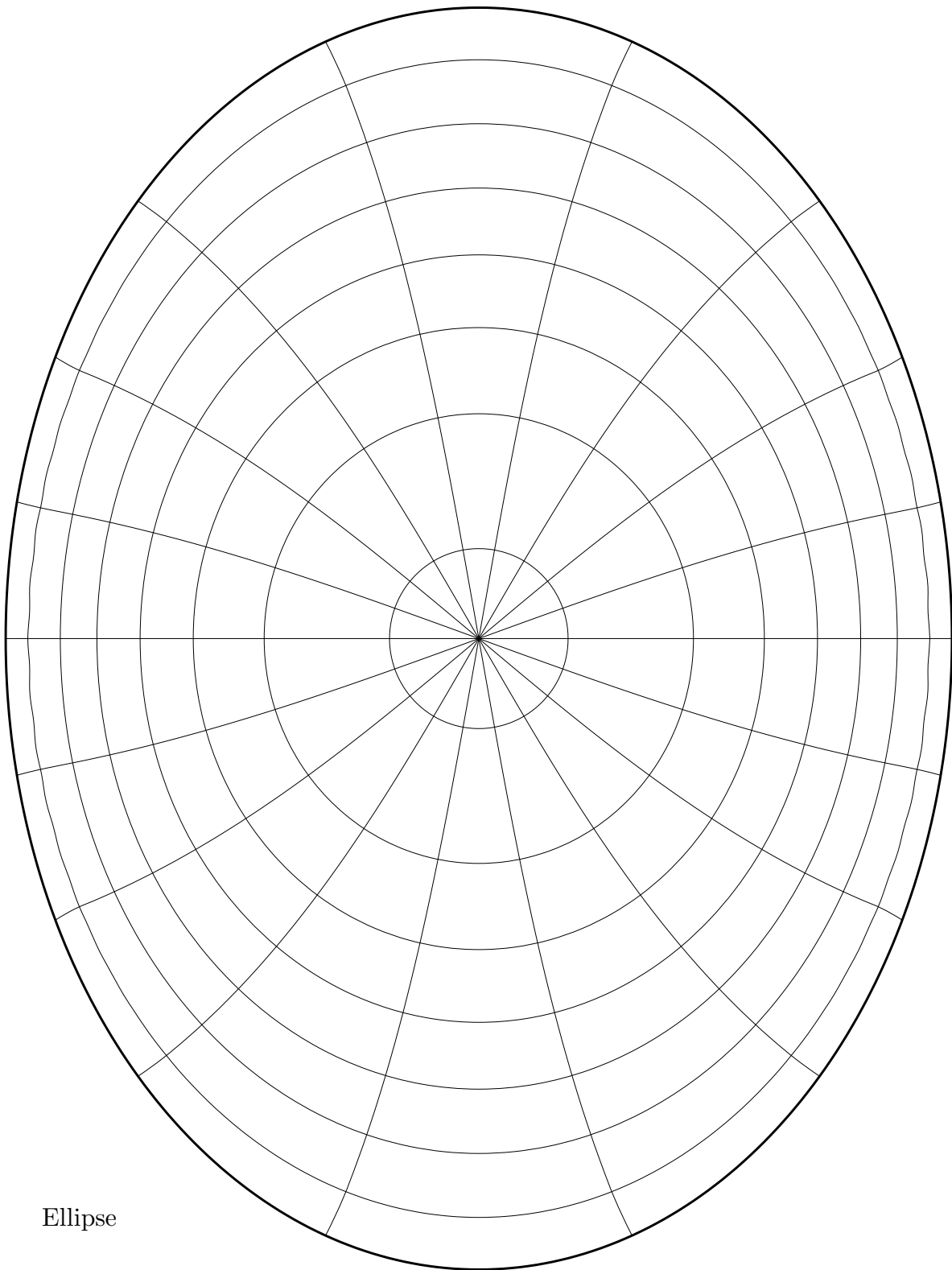
Dans la pratique, les formules (8.3) et (8.4) sont un peu instables lorsqu'on s'approche du bord, à cause des pôles de la fonction à intégrer. Un moyen de résoudre cette difficulté est de considérer que $R(z)$ est affine par morceaux sur le bord entre les points $z(t_j)$ et $z(t_{j+1})$. Pour la fonction Q , ceci donne par exemple

$$(8.4') \quad Q(w) \simeq a + \frac{1/w}{2\pi i} \sum_{0 \leq j < n} \frac{z(t_{j+1}) - z(t_j)}{R(z(t_{j+1})) - R(z(t_j))} \left[\zeta \log \zeta - \zeta \right]_{\zeta=1-w\overline{R(z(t_j))}}^{\zeta=1-w\overline{R(z(t_{j+1}))}}.$$

L'approximation obtenue est alors tout à fait bonne, même au voisinage du bord.

Bibliographie

- [1] N. Kerzman and E.M. Stein : *The Cauchy kernel, the Szegő kernel and the Riemann mapping function*; Math. Ann. **236** (1978) 85-93.
- [2] N. Kerzman and M.R. Trummer : *Numerical conformal mapping via the Szegő kernel*; J. Comp. Appl. Math. **14** (1986) 111-123.
- [3] W. Rudin : *Analyse réelle et complexe*; Mc Graw-Hill, 1966, et Masson, Paris, 1975.
- [4] M.R. Trummer : *An efficient implementation of a conformal mapping method based on the Szegő kernel*; Siam J. Numer. Anal. **23** (1986) 853-872.

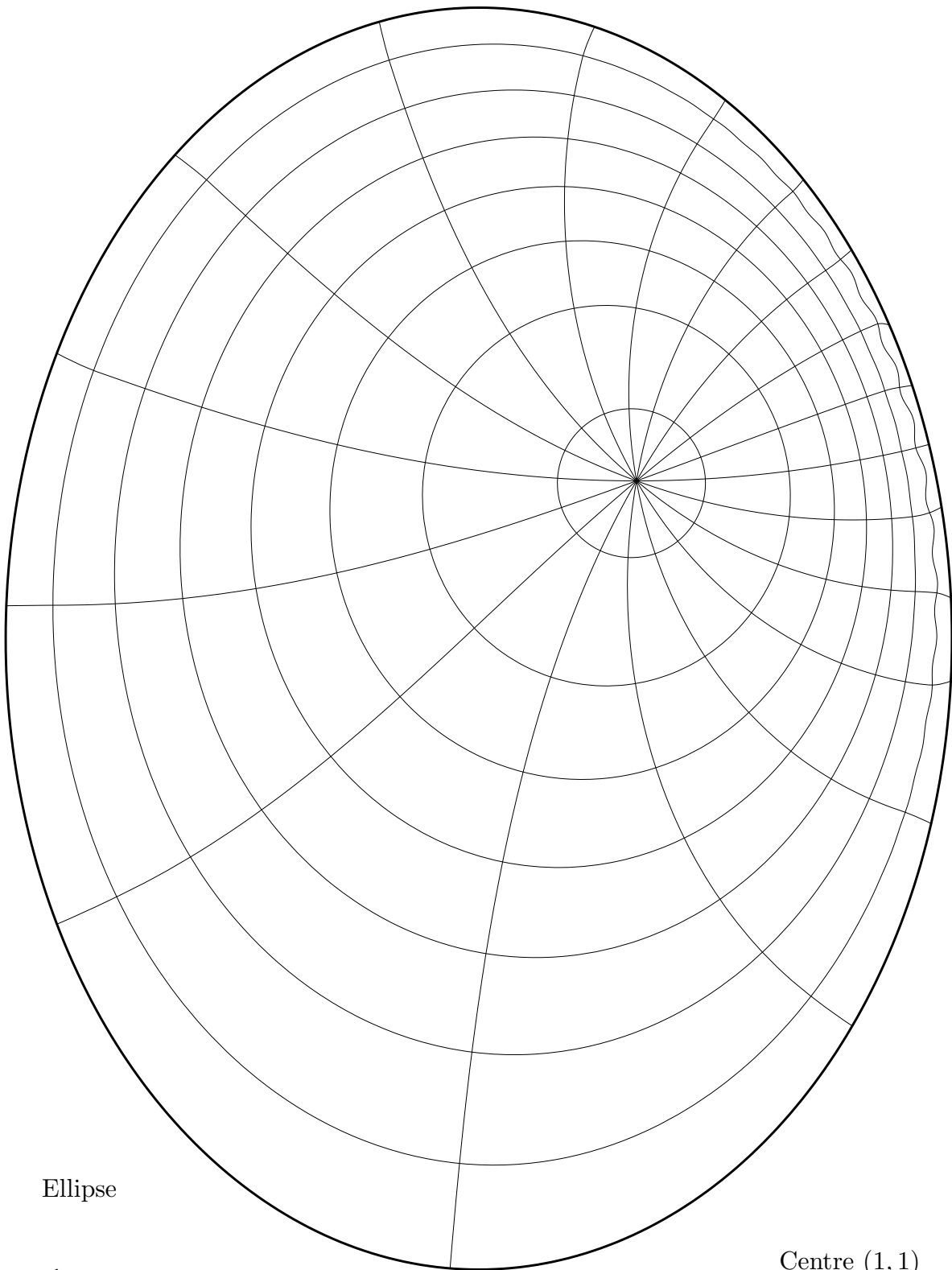


Ellipse

$$\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases}$$

Centre (0,0)

Fig. 1



Ellipse

$$\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases}$$

Centre (1, 1)

Fig. 2

Domaine polygonal convexe

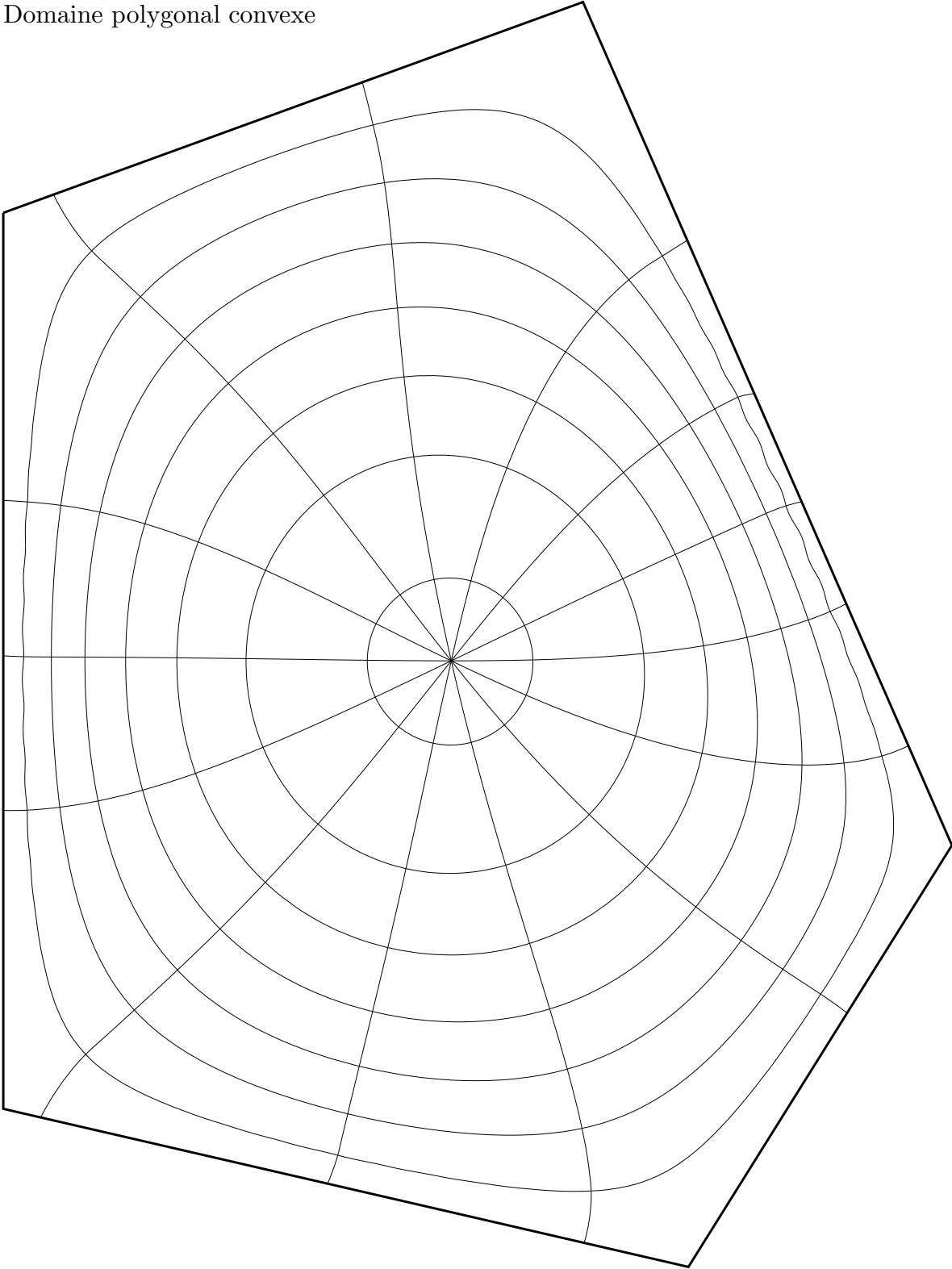


Fig. 3

Domaine polygonal non convexe

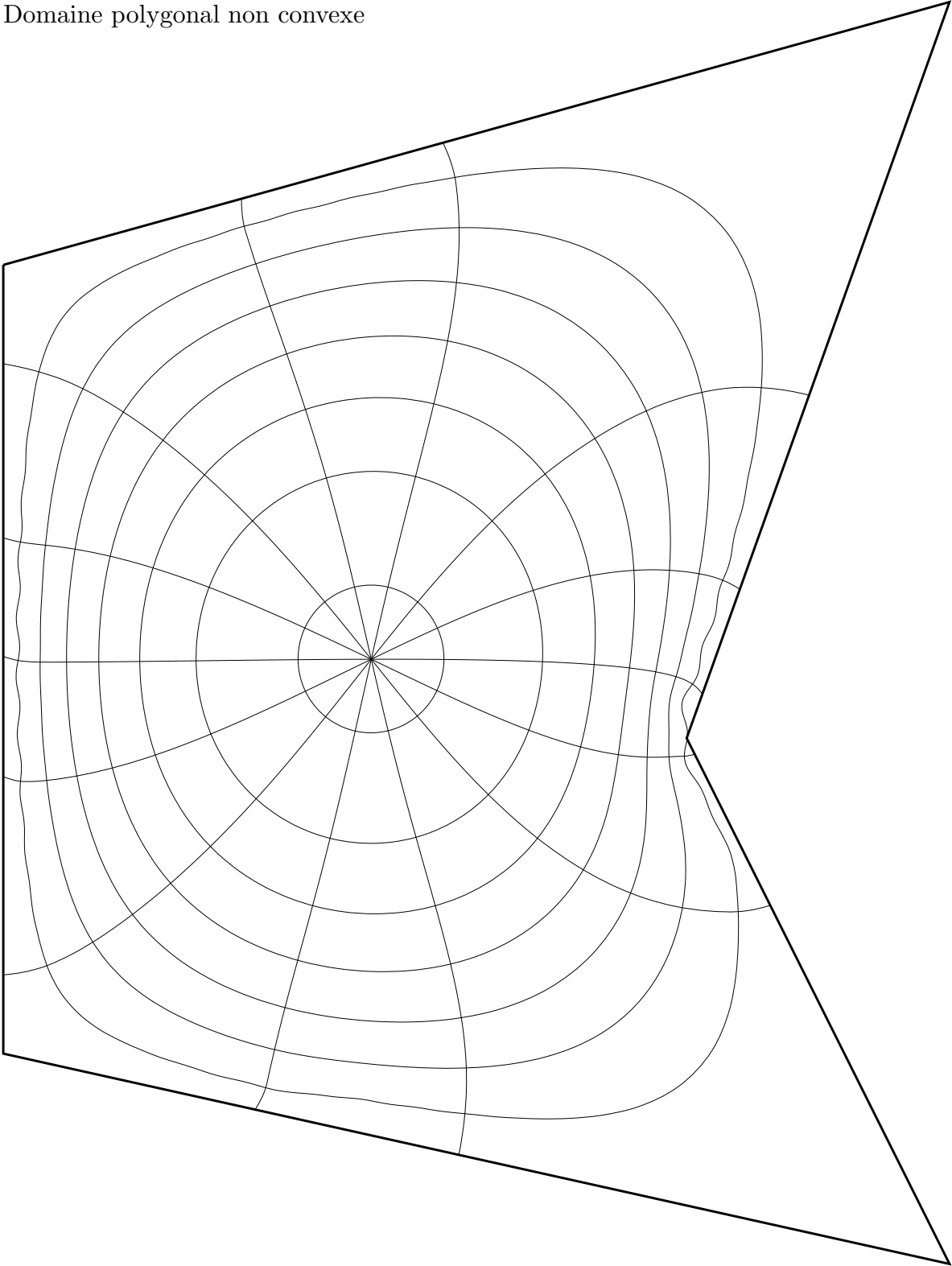
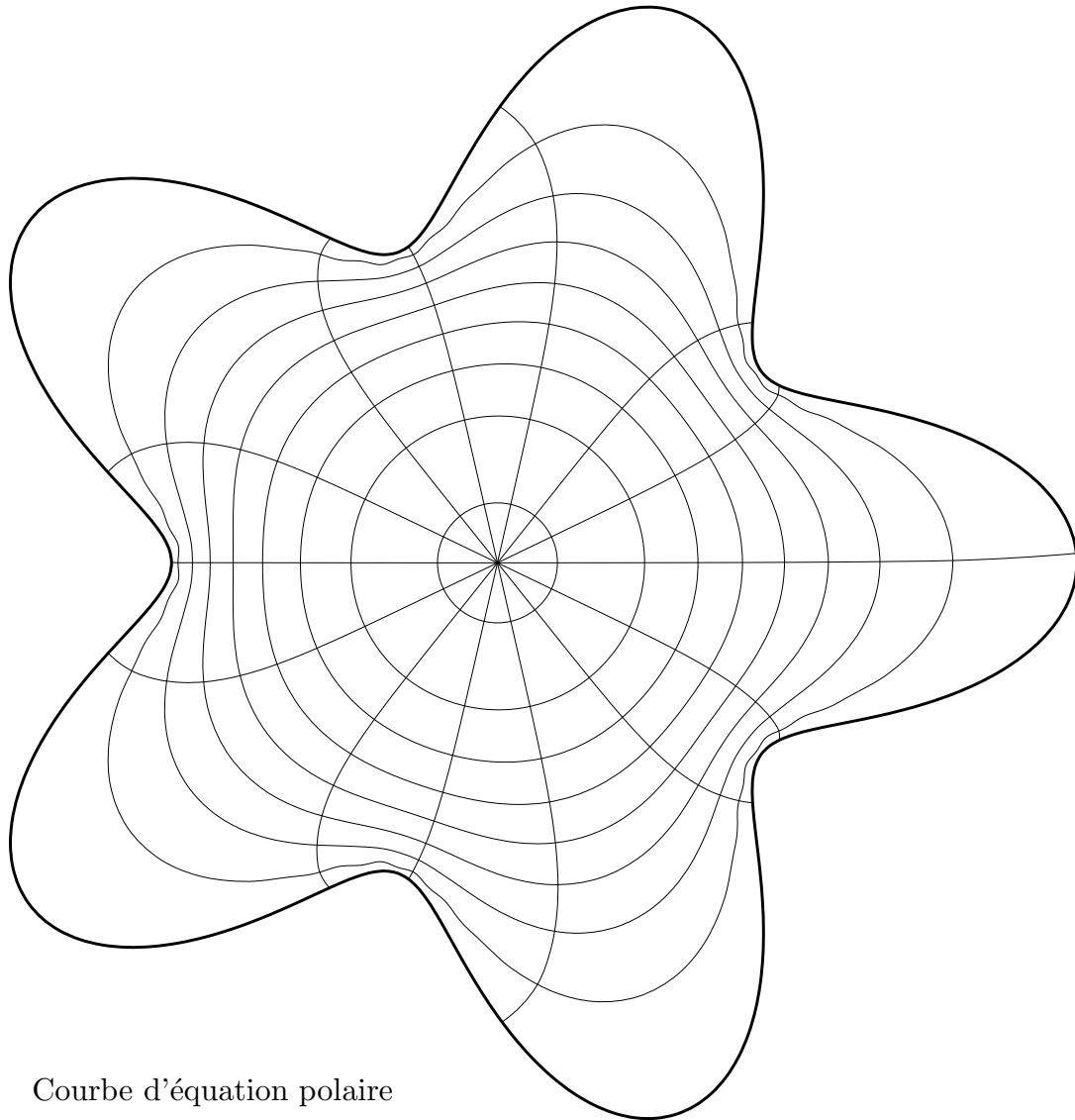


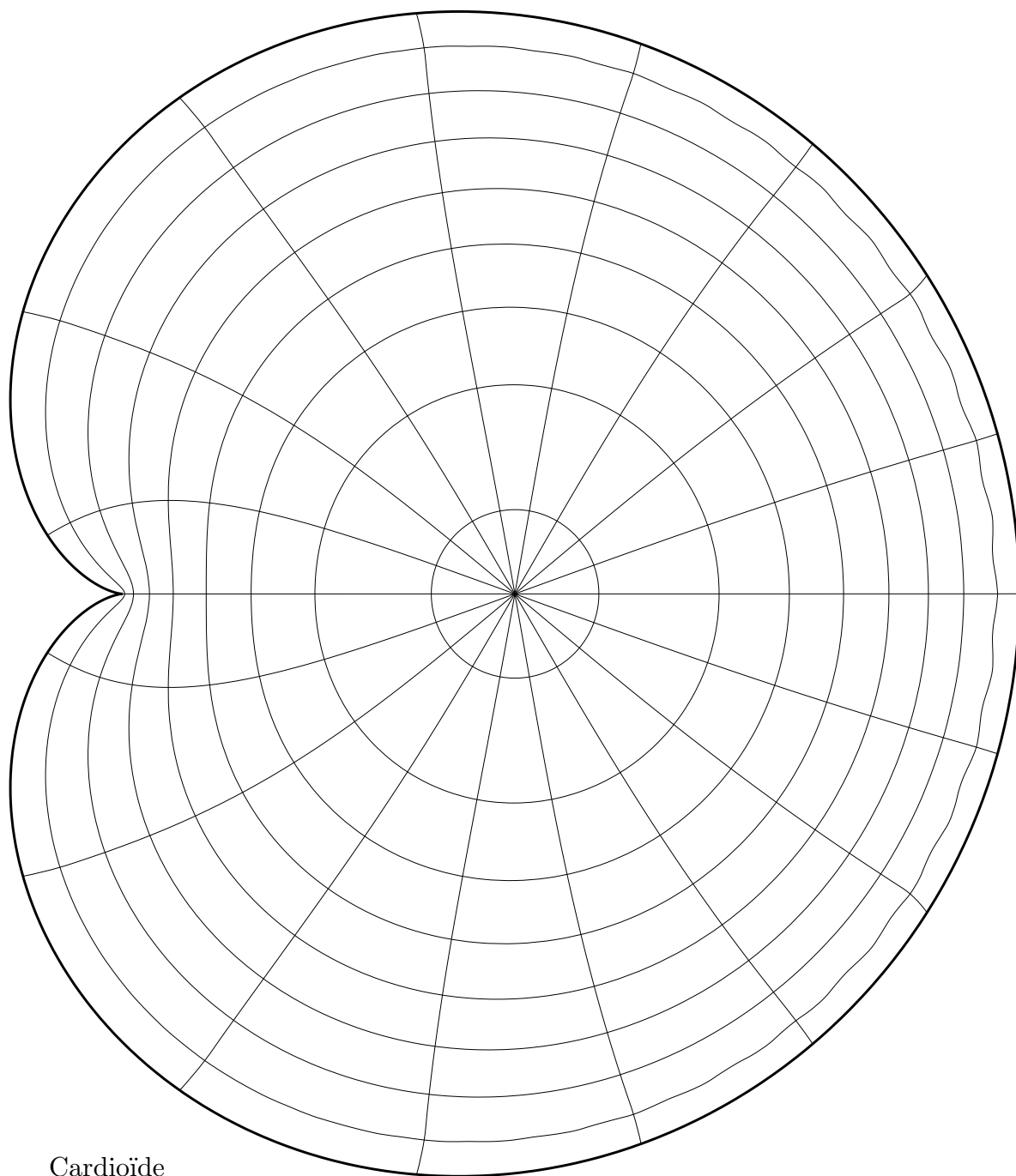
Fig. 4



Courbe d'équation polaire
 $r = 1 + 0.28 \cos 5\theta$

Centre (0,0)

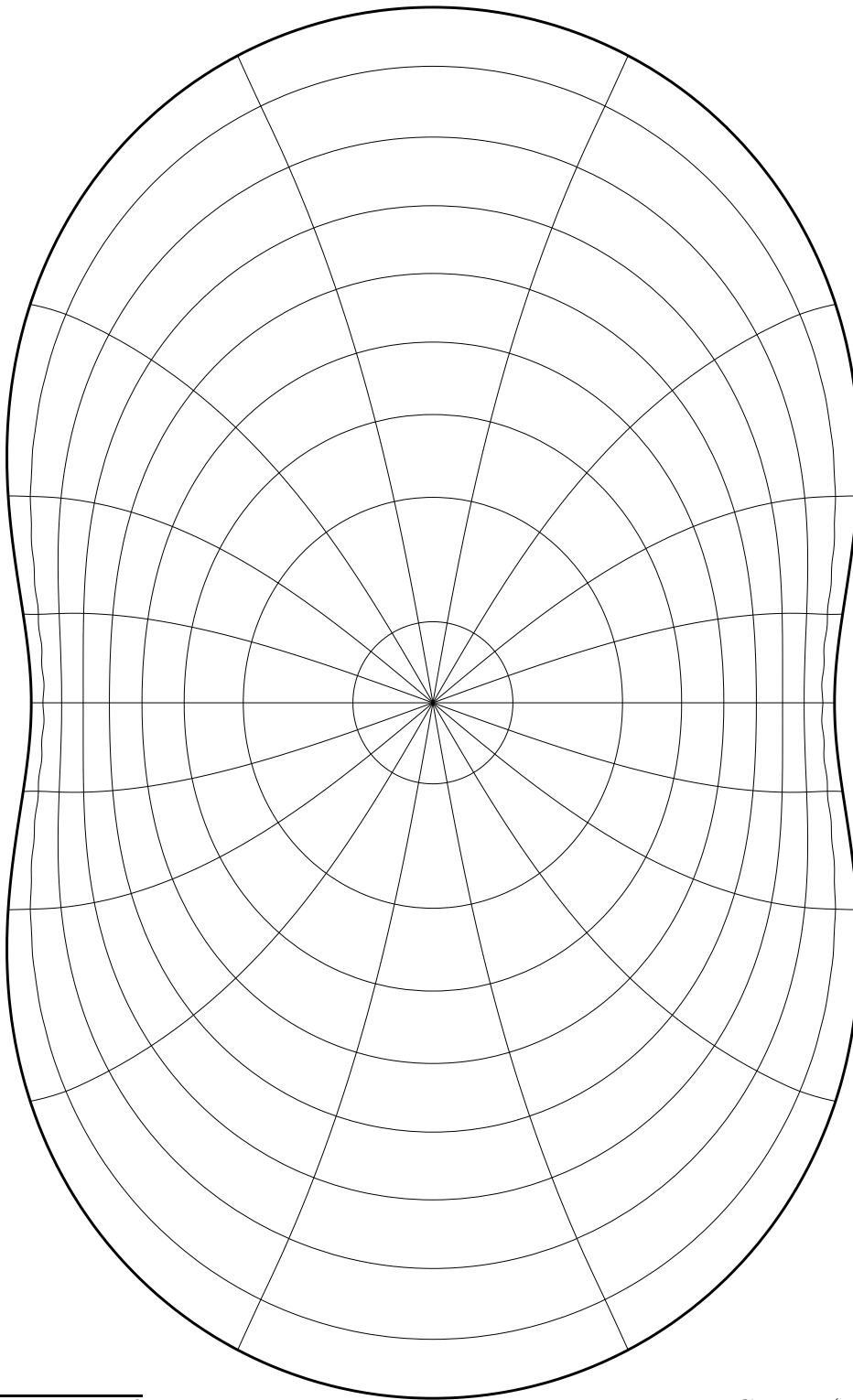
Fig. 5



Cardioïde
 $r = 1 + \cos \theta$

Centre (0.875, 0)

Fig. 6

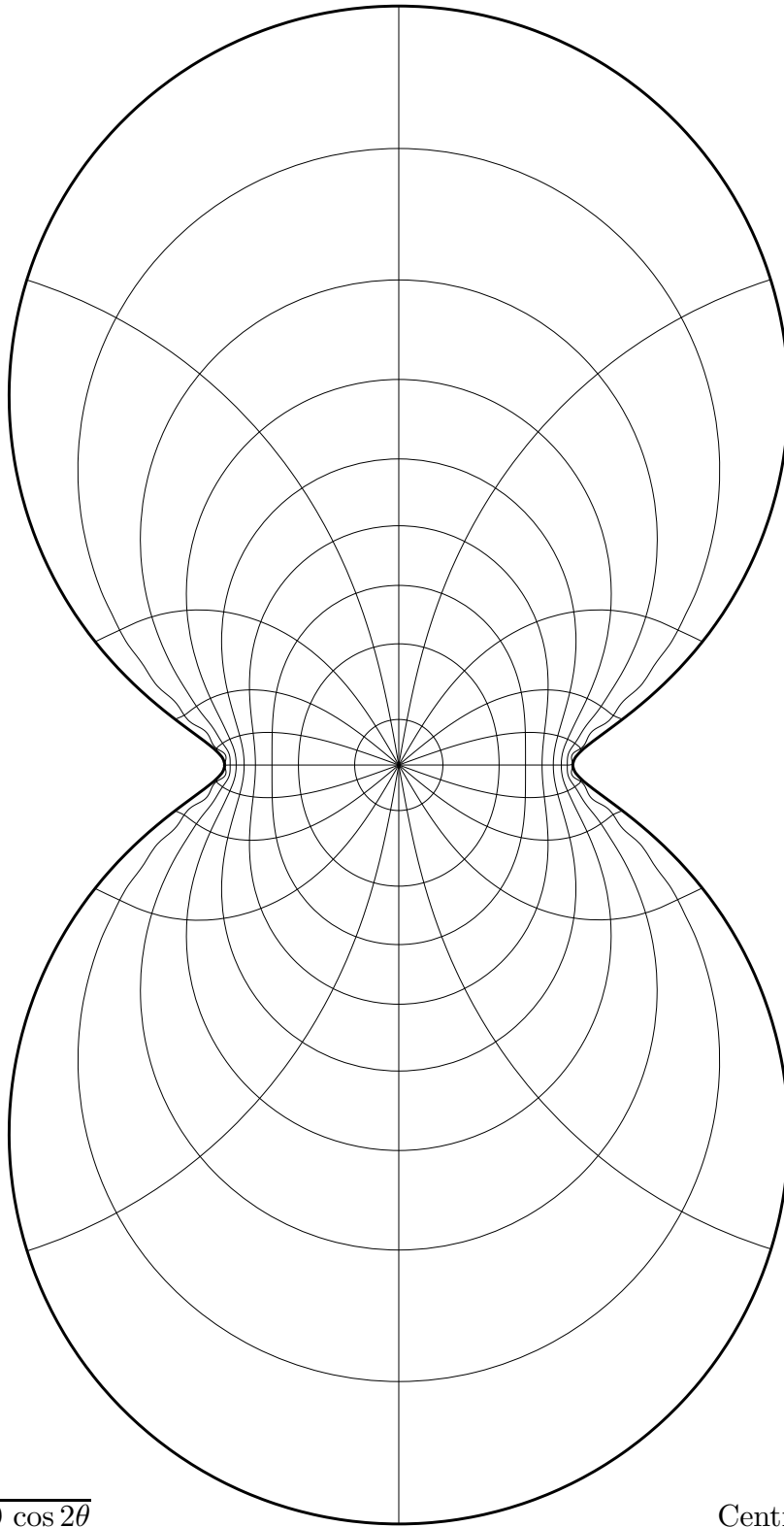


Courbe

$$r = \sqrt{1 - 0.5 \cos 2\theta}$$

Centre (0, 0)

Fig. 7



Courbe
 $r = \sqrt{1 - 0.9 \cos 2\theta}$

Centre (0,0)

Fig. 8