RELATIONS ENTRE LES DIFFÉRENTES NOTIONS DE FIBRÉS ET DE COURANTS POSITIFS.

par J.P. DEMAILLY

0. INTRODUCTION.

Nous nous proposons de généraliser les résultats de l'article [2], consacré à l'étude des relations entre les notions de positivité de P.A. Griffiths et de S. Nakano pour les fibrés vectoriels. Etant donné une forme hermitienne θ sur un produit tensoriel $T \otimes E$, il y a trois manières naturelles de définir la positivité de θ , calquées sur les définitions usuelles concernant les courants positifs. Dans le cas où θ est la forme de courbure d'un fibré vectoriel holomorphe hermitien E au dessus d'une variété analytique X , on retrouve les notions de positivité de P.A. GRIFFITHS [4] et de S. NAKANO [6] relatives aux fibrés, ainsi qu'une troisième notion de positivité plus restrictive, appelée ici positivité forte. Notre objectif essentiel est la démonstration du résultat suivant, contenu implicitement dans [2] : si le fibré E est positif au sens de Griffiths, alors le fibré $E \otimes \det E$ est positif fortement (donc aussi au sens de Nakano). Ce type de résultat est lié étroitement aux calculs de courbure intervenant dans la théorie des morphismes surjectifs de fibrés vectoriels semi-positifs de H. SKODA [8] (cf. aussi [1]). Nous montrons dans le dernier paragraphe comment ces techniques peuvent s'appliquer aux formes et aux courants pour établir des relations entre positivité faible et forte.

1. FORMES HERMITIENNES POSITIVES SUR UN PRODUIT TENSORIEL.

Soit θ une forme hermitienne sur un produit tensoriel $T \otimes E$ d'espaces vectoriels complexes.

DEFINITION 1. θ sera dite

(1) semi-positive au sens de Griffiths, si pour tout vecteur décomposable $x \in T \otimes E$, $x = \xi \otimes u$, avec $\xi \in T$, $u \in E$, on a

$$\theta(x,x) \geqslant 0 ;$$

(2) semi-positive au sens de Nakano, si elle est semi-positive au sens usuel sur $T \otimes E$, c'est-à-dire si

$$\theta(x,x) \geqslant 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in T \otimes E ;$$

(3) semi-positive fortement, si on peut écrire

$$\theta(x,x) = \sum_{j=1}^{N} |x_j^\star(x)|^2$$

pour une famille finie $\{x_j^\star\}_{1 \leqslant j \leqslant N}$ de formes linéaires $x_j^\star$ décomposables sur $T \otimes E$, $x_j^\star = \xi_j^\star \otimes u_j^\star$, avec $\xi_j^\star \in T^\star$, $u_j^\star \in E^\star$.

On désignera par $\geqslant_G$, $\geqslant_N$, $\geqslant_S$ les inégalités de semi-positivité de Griffiths, de Nakano, et de semi-positivité forte. On dira que θ est (strictement) positive, et on écrira respectivement $\theta >_G 0$, $\theta >_N 0$, $\theta >_S 0$ si toute petite perturbation de θ est encore semi-positive dans le sens considéré.

Il est clair que $\theta \geqslant_S 0$ entraîne $\theta \geqslant_N 0$, et que $\theta \geqslant_N 0$ entraîne $\theta \geqslant_G 0$, mais les réciproques sont fausses en général comme on le verra au § 2. Les trois notions coïncident toutefois si l'un des espaces E ou T est de dimension 1.

On suppose maintenant que l'espace E est muni d'une forme hermitienne définie positive φ ; on désigne par n la dimension de T , par r celle de E, et on définit $\mathrm{Tr}_E\, \theta$ comme la forme hermitienne sur T telle que

$$\mathrm{Tr}_E\, \theta\, (\xi,\xi') = \sum_{j=1}^{r} \theta(\xi \otimes e_j \, , \, \xi' \otimes e_j)$$

pour toute base orthonormée $(e_j)_{1\leqslant j\leqslant r}$ de E , et tout couple $(\xi,\xi') \in T^2$; la forme $\mathrm{Tr}_E\,\theta$ est indépendante de la base orthonormée (e_j) choisie, et elle est semi-positive dès que $\theta \geqslant_G 0$. Les semi-positivités forte et de Griffiths sont reliées par le théorème suivant.

THEOREME 1. - Si la forme hermitienne θ sur $T \otimes E$ est semi-positive au sens de Griffiths, alors la forme

$$\theta + \mathrm{Tr}_E\,\theta \otimes \varphi$$

est semi-positive fortement (donc aussi au sens de Nakano).

La démonstration sera une conséquence aisée du lemme suivant.

LEMME 1. - Soient q un entier $\geqslant 3$, u_j et v_k , $1 \leqslant j,k \leqslant r$ des nombres complexes. σ décrivant l'ensemble $\mathfrak{F}$ des applications de $\{1,2,\ldots,r\}$ dans le groupe des racines q-ièmes de l'unité, on pose

$$u'_\sigma = \sum_{\ell=1}^{r} u_\ell\,\overline{\sigma(\ell)} \ , \quad v'_\sigma = \sum_{m=1}^{r} v_m\,\overline{\sigma(m)} \ .$$

Alors pour tout couple (j,k) , $1 \leqslant j,k \leqslant r$, on a l'identité

$$\begin{aligned} q^{-r} \sum_{\sigma\in\mathfrak{F}} u'_\sigma\,\overline{v'_\sigma}\,\sigma(j)\,\overline{\sigma(k)} &= u_j\,\overline{v_k} \quad \text{si} \quad j \neq k \\ &= \sum_{\ell=1}^{r} u_\ell\,\overline{v_\ell} \quad \text{si} \quad j = k \ . \end{aligned}$$

<u>Démonstration.</u> Le coefficient de $u_\ell\,\overline{v_m}$ dans la quantité

$$q^{-r} \sum_{\sigma\in\mathfrak{F}} u'_\sigma\,\overline{v'_\sigma}\,\sigma(j)\,\overline{\sigma(k)}$$

est donné par

$$q^{-r} \sum_{\sigma\in\mathfrak{F}} \sigma(j)\,\overline{\sigma(k)}\,\overline{\sigma(\ell)}\,\sigma(m) \ .$$

Ce coefficient vaut 1 lorsque les paires $\{j,m\}$ et $\{k,\ell\}$ coïncident (puisqu'alors $\sigma(j)\,\overline{\sigma(k)}\,\overline{\sigma(\ell)}\,\sigma(m) = 1$ pour chacun des q^r éléments $\sigma\in\mathfrak{F}$) .

Il s'agit de montrer que

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{F}} \sigma(j)\,\overline{\sigma(k)}\,\overline{\sigma(\ell)}\,\sigma(m) = 0$$

lorsque les paires $\{j,m\}$, $\{k,\ell\}$ sont distinctes.

Si $\{j,m\} \neq \{k,\ell\}$, l'un des éléments de l'une des paires n'appartient pas à l'autre paire. Comme les quatre indices j,k,ℓ,m jouent le même rôle (quitte à changer éventuellement σ en $\bar{\sigma}$) , on peut supposer par exemple que j n'appartient pas à $\{k,\ell\}$.

Effectuons sur σ la substitution $\sigma \mapsto \tau$, où τ est défini par

$$\tau(j) = e^{\frac{2i\tau}{q}} \sigma(j) \ , \ \tau(s) = \sigma(s) \quad \text{pour} \quad s \neq j \ .$$

On obtient

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma \in \mathfrak{F}} \sigma(j)\, \overline{\sigma(k)}\, \overline{\sigma(\ell)}\, \sigma(m) &= \sum_{\tau \in \mathfrak{F}} \\ &= e^{\frac{2i\pi}{q}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{F}} \qquad \text{si} \quad j \neq m \\ &= e^{\frac{4i\pi}{q}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{F}} \qquad \text{si} \quad j = m \ .\end{aligned}$$

Comme $q \geqslant 3$ par hypothèse, il en résulte bien

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{F}} \sigma(j)\, \overline{\sigma(k)}\, \overline{\sigma(\ell)}\, \sigma(m) = 0 \ .$$

<u>Démonstration du théorème 1</u> .

Etant donné une base de T et une base orthonormée (e_j) de E , on désigne par (ξ_λ) , $1 \leqslant \lambda \leqslant n$, les coordonnées de $\xi \in T$, par (u_j) , $1 \leqslant j \leqslant r$, celles de $u \in E$, et par $(x_{\lambda j})$ celles de $x \in T \otimes E$.

Si les nombres complexes $a_{\lambda\mu jk}$ sont les coefficients de θ (avec $\bar{a}_{\lambda\mu jk} = a_{\mu\lambda kj}$) , on a les formules

$$\theta(\xi \otimes u, \xi \otimes u) = \sum_{\lambda,\mu,j,k} a_{\lambda\mu jk}\, \xi_\lambda\, \bar{\xi}_\mu\, u_j\, \bar{u}_k \ ,$$

$$\theta(x,x) = \sum_{\lambda,\mu,j,k} a_{\lambda\mu jk}\, x_{\lambda j}\, \bar{x}_{\mu k} \ ,$$

$$\mathrm{Tr}_E\, \theta \otimes \varphi(x,x) = \sum_{\lambda,\mu,j,k} a_{\lambda\mu jj}\, x_{\lambda k}\, \bar{x}_{\mu k} \ ,$$

avec $\qquad 1 \leqslant \lambda,\mu \leqslant n \ , \qquad 1 \leqslant j,k \leqslant r \ .$

Par hypothèse, $\theta(\xi \otimes u, \xi \otimes u)$ est $\geqslant 0$.

σ décrivant comme dans le lemme 1 l'ensemble $\mathcal{F}$ des applications de $\{1,\ldots,r\}$ dans le groupe des racines q-ièmes de l'unité, on pose

$$x'_{\lambda\sigma} = \sum_{\ell=1}^{r} x_{\lambda\ell}\,\overline{\sigma(\ell)} .$$

D'après le lemme 1 , on a

$$q^{-r} \sum_{\sigma\in\mathcal{F}} \sum_{\lambda,\mu,j,k} a_{\lambda\mu jk}\, x'_{\lambda\sigma}\, \overline{x'_{\mu\sigma}}\, \sigma(j)\, \overline{\sigma(k)}$$

$$= \sum_{\lambda,\mu,j\neq k} a_{\lambda\mu jk}\, x_{\lambda j}\, \overline{x_{\mu k}} + \sum_{\lambda,\mu,j,k} a_{\lambda\mu jj}\, x_{\lambda k}\, \overline{x_{\mu k}}$$

$$= \theta(x,x) + \mathrm{Tr}_E\, \theta\otimes\varphi(x,x) - \sum_{\lambda,\mu,j} a_{\lambda\mu jj}\, x_{\lambda j}\, \overline{x_{\mu j}} .$$

On obtient donc

$$\theta(x,x) + \mathrm{Tr}_E\, \theta\otimes\varphi(x,x) =$$
$$q^{-r} \sum_{\sigma\in\mathcal{F}} \sum_{\lambda,\mu,j,k} a_{\lambda\mu jk}\, x'_{\lambda\sigma}\, \overline{x'_{\mu\sigma}}\, \sigma(j)\, \overline{\sigma(k)} + \sum_{\lambda,\mu,j} a_{\lambda\mu jj}\, x_{\lambda j}\, \overline{x_{\mu j}} \geqslant 0$$

d'après l'hypothèse de positivité de Griffiths de θ . Il nous reste à vérifier que le second membre est somme de carrés de formes linéaires décomposables sur $T\otimes E$. Par hypothèse, la forme hermitienne de coefficients $\left(\sum_{j,k} a_{\lambda\mu jk}\,\sigma(j)\,\overline{\sigma(k)}\right)_{\lambda,\mu}$ est semi-positive sur T , donc somme de carrés de formes linéaires $\xi^\star_{\nu\sigma}\in T^\star$, $1\leqslant\nu\leqslant n$. De même la forme de coefficients $(a_{\lambda\mu jj})_{\lambda,\mu}$ est somme de carrés de formes linéaires $\xi^\star_{\nu j}\in T^\star$, $1\leqslant\nu\leqslant n$, $1\leqslant j\leqslant r$.

Pour tout vecteur décomposable $x = \xi\otimes u\in T\otimes E$, on peut écrire, en notant $e_\sigma = \sum_{j=1}^{r}\sigma(j)\, e_j$:

$$x'_{\lambda\sigma} = \xi_\lambda\, \varphi(u,e_\sigma) ,$$

$$\theta(x,x) + \mathrm{Tr}_E\, \theta\otimes\varphi(x,x) =$$
$$q^{-r}\sum_{\sigma\in\mathcal{F}}\sum_{\nu=1}^{n} |\xi^\star_{\nu\sigma}(\xi)|^2\, |\varphi(u,e_\sigma)|^2$$
$$+ \sum_{j=1}^{r}\sum_{\nu=1}^{n} |\xi^\star_{\nu j}(\xi)|^2\, |\varphi(u,e_j)|^2 ,$$

de sorte que

$$\theta + \mathrm{Tr}_E\, \theta \otimes \varphi = q^{-r} \sum_{\sigma \in \mathfrak{F}} \sum_{\nu=1}^{n} |\xi^\star_{\nu\sigma} \otimes \varphi(?,e_\sigma)|^2$$

$$+ \sum_{j=1}^{r} \sum_{\nu=1}^{n} |\xi^\star_{\nu j} \otimes \varphi(?,e_j)|^2 \; .$$

La démonstation est achevée. Le corollaire qui suit est une généralisation du lemme fondamental (3,5) de H. SKODA [8], relatif au cas où $-\theta$ est la forme de courbure d'un sous-fibré E d'un fibré trivial.

COROLLAIRE 1. - Si la forme hermitienne θ est semi-positive au sens de Griffiths sur $T \otimes E$, où $\dim T = n$, $\dim E = r$, alors

$$\theta \leqslant_S \mathrm{Inf}(n,r) \, . \, \mathrm{Tr}_E\, \theta \otimes \varphi \; .$$

<u>Démonstration</u>. Montrons tout d'abord le

LEMME 2. - $\mathrm{Tr}_E\, \theta \otimes \varphi - \theta \geqslant_G 0$.

En effet, tout vecteur décomposable $x \in T \otimes E$ peut s'écrire $x = \xi \otimes u$ où $\|u\|^2 = \varphi(u,u) = 1$; si l'on choisit une base orthonormée $(e_j)_{1 \leqslant j \leqslant r}$ de E telle que $e = u$, il vient

$$\theta(x,x) = \theta(\xi \otimes e_1, \xi \otimes e_1) \; ,$$

$$\mathrm{Tr}_E \theta \otimes \varphi(x,x) = \sum_{j=1}^{r} \theta(\xi \otimes e_j, \xi \otimes e_j) \, \|u\|^2 \geqslant \theta(x,x) \; ,$$

grâce à l'hypothèse $\theta \geqslant_G 0$. Le lemme 2 est démontré. ∎

D'après le théorème 1, on a donc

$$\mathrm{Tr}_E\, \theta \otimes \varphi - \theta + \mathrm{Tr}_E(\mathrm{Tr}_E\, \theta \otimes \varphi - \theta) \otimes \varphi = r\, \mathrm{Tr}_E\, \theta \otimes \varphi - \theta \geqslant_S 0 \; .$$

Il nous reste à montrer qu'on a également

$$\theta \leqslant_S n\, \mathrm{Tr}_E\, \theta \otimes \varphi \; ,$$

ce qui est plus difficile.

Munissons T de la forme hermitienne semi-positive $\omega = \mathrm{Tr}_E\, \theta$, que nous supposons pour l'instant <u>non dégénérée</u>. Soit $\widehat{\theta} = \omega \otimes \varphi - \theta \geqslant_G 0$ la forme considérée dans le lemme 2. Les coefficients de $\widehat{\theta}$, relativement à un couple de bases orthonormées de T et E, sont donnés en fonction des coefficients $a_{\lambda\mu jk}$ de θ et des symboles de Kronecker $\delta_{\lambda\mu}$, δ_{jk}, par

$$\hat{a}_{\lambda\mu jk} = \delta_{\lambda\mu}\,\delta_{jk} - a_{\lambda\mu jk} .$$

On applique le procédé de sommation du lemme 1, mais cette fois par rapport à l'espace T (indices λ et μ). Si $\mathcal{F}$ est l'ensemble des applications de $\{1,\ldots,n\}$ dans le groupe des racines q-ièmes de l'unité, et si $1 \leqslant \lambda,\mu \leqslant n$, $1 \leqslant j,k \leqslant r$, il vient d'après le lemme 1 :

$$q^{-n} \sum_{\sigma \in \mathcal{F}} \sum_{\lambda,\mu,j,k} \hat{a}_{\lambda\mu jk}\, x'_{\sigma j}\, \overline{x'_{\sigma k}}\, \sigma(\lambda)\, \overline{\sigma(\mu)}$$

$$= \sum_{\lambda\neq\mu,j,k} \hat{a}_{\lambda\mu jk}\, x_{\lambda j}\, \overline{x_{\mu k}} + \sum_{\lambda,\mu,j,k} \hat{a}_{\lambda\lambda jk}\, x_{\mu j}\, \overline{x_{\mu k}}$$

$$= - \sum_{\lambda\neq\mu,j,k} a_{\lambda\mu jk}\, x_{\lambda j}\, \overline{x_{\mu k}} - \sum_{\lambda,\mu,j,k} a_{\lambda\lambda jk}\, x_{\mu j}\, \overline{x_{\mu k}} + n \sum_{\mu,j} |x_{\mu j}|^2 ,$$

ce qui donne

$$n \sum_{j,\mu} |x_{\mu j}|^2 - \sum_{\lambda,\mu,j,k} a_{\lambda\mu jk}\, x_{\lambda j}\, \overline{x_{\mu k}}$$

$$= q^{-n} \sum_{\sigma \in \mathcal{F}} \sum_{\lambda,\mu,j,k} \hat{a}_{\lambda\mu jk}\, \sigma(\lambda)\, \overline{\sigma(\mu)}\, x'_{\sigma j}\, \overline{x'_{\sigma k}} + \sum_{\lambda\neq\mu,j,k} a_{\lambda\lambda jk}\, x_{\mu j}\, \overline{x_{\mu k}} .$$

Comme dans la démonstration du théorème 1, on voit donc que

$$\theta \leqslant_S n\, \omega \otimes \varphi = n\, \mathrm{Tr}_E\, \theta \otimes \varphi .$$

Lorsque ω est dégénérée, de noyau K, il est facile de voir grâce au lemme 2 que θ induit une forme hermitienne Θ sur $T/K \otimes E$. En remplaçant θ par Θ, et n par $N = \dim T/K \leqslant n$, on obtient

$$\Theta \leqslant_S N \,.\, \mathrm{Tr}_E\, \Theta \otimes \varphi ,$$

ce qui entraîne

$$\theta \leqslant_S N \,.\, \mathrm{Tr}_E\, \theta \otimes \varphi \leqslant_S n \,.\, \mathrm{Tr}_E\, \theta \otimes \varphi .$$

Nous allons voir maintenant comment ces notions se traduisent dans le cadre des fibrés vectoriels hermitiens.

2. FIBRÉS POSITIFS.

Si E est un fibré vectoriel holomorphe hermitien au dessus d'une variété analytique complexe X, on peut définir une connexion canonique D sur E, hermitienne et holomorphe (cf. A. DOUADY et J.L. VERDIER [3], P.A. GRIFFITHS [4]). D envoie l'espace $C^{\infty}_{p,q}(X,E)$ des formes de type (p,q) à valeurs dans E, dans l'espace $C^{\infty}_{p+1,q}(X,E) \oplus C^{\infty}_{p,q+1}(X,E)$; la forme de courbure $c(E)$ du fibré E est alors définie par la propriété suivante

$$D^2 u = c(E).u$$

pour toute section C^{∞} u de E, de sorte que $i\, c(E)$ est une $(1,1)$ forme à valeurs dans le fibré Herm (E,E) des endomorphismes hermitiens de E. On identifiera $i\, c(E)$ à la forme hermitienne θ sur $TX \otimes E$ qui lui est canoniquement associée.

DEFINITION 2. - Le fibré E est dit semi-positif (respectivement positif) au sens de Griffiths, au sens de Nakano, ou au sens fort, s'il en est ainsi pour la forme hermitienne θ sur chaque fibre $T_z X \otimes E_z$, $z \in X$.

La forme de courbure $c(E^\star)$ du fibré dual $E^\star$ est donnée par

$$c(E^\star) = - \,{}^t c(E) ,$$

où ${}^t c(E) \in$ Herm $(E^\star, E^\star)$ désigne l'endomorphisme transposé de $c(E)$. Le lecteur en déduira aisément la proposition suivante.

PROPOSITION 1. Le fibré E est (semi-) positif au sens de Griffiths (resp. au sens fort) si et seulement si le fibré dual $E^\star$ est (semi-) négatif au sens de Griffiths (resp. au sens fort).

Le résultat analogue pour la positivité de Nakano n'est pas vrai (voir l'exemple ci-dessous).

Il est classique d'autre part (P.A. GRIFFITHS [4]) qu'un fibré quotient d'un fibré $E >_G 0$ est encore positif au sens de Griffiths. De même un sous-fibré d'un fibré $E <_G 0$ est $<_G 0$. On peut vérifier que cette deuxième propriété subsiste au sens de Nakano ; aucune par contre n'est vraie au sens fort en général. Les diverses notions sont reliées grâce au théorème 1 et au corollaire 1, qui impliquent le

THEOREME 2. - Soit E un fibré hermitien (semi-) positif au sens de Griffiths. On désigne par r le rang de E et par n la dimension de la variété X. Alors les fibrés

$$E \otimes \text{dét}\, E \ , \ E^\star \otimes (\text{dét}\, E)^{\text{Inf}(n,r)}$$

sont fortement (semi-) positifs. En particulier, ils sont (semi-) positifs au sens de Nakano, et les fibrés

$$E^\star \otimes (\det E)^{-1} \ , \ E \otimes (\text{dét}\, E)^{-\text{Inf}(n,r)}$$

sont (semi-) négatifs au sens de Nakano.

Démonstration. Il est bien connu que la courbure du fibré $\text{dét}\, E = \Lambda^r E$ est reliée à la courbure de E par la formule

$$c(\text{dét}\, E) = \text{Tr}_E\, c(E) = - \text{Tr}_{E^\star} c(E^\star) \ ,$$

et que pour deux fibrés vectoriels hermitiens E_1 et E_2, on a

$$c(E_1 \otimes E_2) = c(E_1) \otimes \text{Id}_{E_2} + \text{Id}_{E_1} \otimes c(E_2).$$

Le théorème 2 se déduit alors du théorème 1 et de son corollaire en prenant successivement $\theta = i\, c(E)$, $\theta = - i\, c(E^\star) = i\, {}^t c(E)$.

Exemple. Soient V un espace vectoriel hermitien de dimension $n+1$, $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ l'espace projectif associé, $O(-1)$ le sous-fibré linéaire canonique du fibré trivial V sur $\mathbb{P}_n$, $Q = V/O(-1)$ le fibré quotient de rang n . On munit $O(-1)$ et Q de leurs métriques naturelles, induites par celle de V , et $\mathbb{P}_n$ de sa métrique kählérienne usuelle. On a classiquement les isomorphismes métriques

$$\text{dét}\, Q \simeq O(-1)^\star = O(1)$$

$$T\,\mathbb{P}_n \simeq Q \otimes O(1) \simeq Q \otimes \text{dét}\, Q \ .$$

Q est semi-positif au sens de Griffiths, comme quotient du fibré trivial V. On retrouve donc d'après le théorème 2 que le fibré tangent $T\,\mathbb{P}_n$ est semi-positif au sens de Nakano (cf. M. SCHNEIDER [7]), et même au sens fort.

Etant donné une base orthonormée $(e_o,e_1,\ldots,e_n)$ de V, $(e_1,\ldots,e_n)$ définit une base orthonormée de la fibre Q_z au dessus du point $z = [e_o]$ de $\mathbb{P}_n$. Si l'on munit $T_z\,\mathbb{P}_n$ de la base orthonormée $(\eta_1,\ldots,\eta_n)$ correspondante, déduite de l'isomorphisme canonique $T\,\mathbb{P}_n \simeq Q \otimes \det Q$, la forme de courbure $\theta = i\,c(Q)$ s'explicite en coordonnées par les formules

$$\theta(\xi \otimes u, \xi \otimes u) = \Big|\sum_{j=1}^{n} \xi_j\,\bar{u}_j\Big|^2 ,$$

$$\theta(x,x) = \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} x_{jk}\,\overline{x_{kj}} ,$$

$$\mathrm{Tr}_Q\theta(\xi,\xi) = |\xi|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2 ,$$

pour $\xi = \sum_{j=1}^{n} \xi_j\,\eta_j \in T_z\,\mathbb{P}_n$, $u = \sum_{j=1}^{n} u_j\,e_j \in Q_z$,

$$x = \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} x_{jk}\,\eta_j \otimes e_k \in T_z\,\mathbb{P}_n \otimes Q_z .$$

La forme de courbure de $T\,\mathbb{P}_n$ s'écrit donc

$$\langle(\theta + \mathrm{Tr}_Q\,\theta \otimes \mathrm{Id}_Q)(x),x\rangle = \sum_{j,k} x_{jk}\,\overline{x_{kj}} + x_{jk}\,\overline{x_{jk}}$$

$$= 2\sum_j |x_{jj}|^2 + \sum_{j<k} |x_{jk} + x_{kj}|^2 .$$

La forme $\mathrm{Tr}_Q\,\theta$ est définie positive, mais la forme $\theta + \mathrm{Tr}_Q\,\theta \otimes \mathrm{Id}_Q$ est seulement <u>semi</u>-positive au sens de Nakano si $n \geqslant 2$. Il n'existe donc pas de constante $\gamma < 1$ telle que $\theta + \gamma\,\mathrm{Tr}_Q \otimes \mathrm{Id}_Q \geqslant_N 0$, et en ce sens le résultat du théorème 1 est le meilleur possible. En ce qui concerne le corollaire 1, le lecteur pourra vérifier que l'inégalité $Q^\star \otimes (\det Q)^n \geqslant_N 0$ est optimale, mais que dans cet exemple $Q \otimes (\det Q)^{-1} \leqslant_N 0$. Lorsque $n \geqslant 2$, il apparaît qu'on a $Q \geqslant_G 0$ sans avoir $Q \geqslant_N 0$, et qu'on a $Q^\star \leqslant_N 0$ (puisque $Q^\star$ est un sous-fibré du fibré trivial $V^\star$) sans avoir $Q^\star \leqslant_S 0$ (ce qui entraînerait $Q \geqslant_S 0$!).

3. COURANTS POSITIFS.

Seules les propriétés ponctuelles des courants seront étudiées dans ce paragraphe, de sorte qu'on se limitera à la considération des formes différentielles. La première définition des formes et des courants positifs a été donnée par P. LELONG [5].

Soient T un espace vectoriel complexe de dimension n , $F = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T,\mathbb{C})$ le complexifié du $\mathbb{R}$-dual de T , $\Lambda^{p,q} F$ l'espace des formes de type (p,q) sur T. Pour tout entier p, on pose

$$\varepsilon_p = \left(\frac{i}{2}\right)^p (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} = 2^{-p}\, i^{p^2} .$$

DEFINITION 3. - Une forme $\alpha \in \Lambda^{p,q} F$ est dite

(1) positive, si elle peut s'écrire

$$\alpha = \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_p\, \alpha_j \wedge \overline{\alpha_j}$$

avec des éléments $\alpha_j \in \Lambda^{p,o} F$;

(2) fortement positive, si on a une écriture analogue avec des formes α_j décomposables ;

(3) faiblement positive, si pour toute forme $\beta \in \Lambda^{k,k} F$ fortement positive, où $p+k = n$, la (n,n)-forme $\alpha \wedge \beta$ est positive.

Nous noterons P^p (resp. SP^p , WP^p) le cône des (p,p)-formes positives (resp. fortement, faiblement positives), et nous désignerons par $\geqslant$ (resp. $\geqslant_S$, $\geqslant_W$) l'inégalité de positivité (resp. de positivité forte, faible).

On vérifie aisément à partir de cette définition qu'on a les inclusions

$$SP^p \subset P^p \subset WP^p ,$$

et que les éléments de WP^p sont réels.

Si l'on a choisi une (n,n)-forme τ positive, non nulle, il y a une forme bilinéaire naturelle

$$\Lambda^{p,p} F \times \Lambda^{k,k} F \to \mathbb{C}$$

(avec $p+k = n$) qui à $\alpha \in \Lambda^{p,p} F$, $\beta \in \Lambda^{k,k} F$ associe l'unique nombre complexe γ

tel que

$$\alpha \wedge \beta = \gamma \,.\, \tau \,.$$

WP^p s'identifie alors par définition au cône dual $(SP^k)^o$ de SP^k, et on peut montrer d'autre part que

$$SP^p = (WP^k)^o \quad , \quad P^p = (P^k)^o \,.$$

Enfin, si $p = 0,1$, $n-1$, ou n, toutes les formes de $\Lambda^{p,o} F$ sont décomposables, donc

$$SP^p = P^p$$
$$WP^p = (SP^k)^o = (P^k)^o = P^p \,.$$

On suppose désormais que l'espace T est muni d'une métrique hermitienne, représentée par la $(1,1)$-forme positive

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\bar{z}_j$$

dans une base orthonormée $(dz_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ du dual $E^\star$ de E. L'espace $F = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T,\mathbb{C})$ et l'algèbre extérieure ΛF sont munis des métriques usuelles correspondantes. On désigne classiquement par L l'opérateur de multiplication extérieure par ω dans l'espace hilbertien ΛF, et par Λ son adjoint ; on a donc :

$$L\alpha = \omega \wedge \alpha \;, \quad (\Lambda\alpha|\beta) = (\alpha, L\beta) = (\alpha|\omega \wedge \beta)$$

pour toutes formes $\alpha,\beta \in \Lambda F$.

On peut écrire en coordonnées, pour tout $\alpha \in \Lambda^{p,p} F$,

$$\alpha = \varepsilon_p \sum_{J,K}{}' \alpha_{J,K}\, dz_J \wedge d\bar{z}_K \;,$$

$$\frac{1}{r!} L^r\alpha = \varepsilon_{p+r} \sum_{J,K,M}{}' \alpha_{J,K}\, dz_{JM} \wedge d\bar{z}_{KM} \;,$$

$$\frac{1}{r!} \Lambda^r\alpha = \varepsilon_{p-r} \sum_{M,N,P}{}' \alpha_{NM,PM}\, dz_N \wedge d\bar{z}_P \;,$$

où la notation $\sum'$ signifie que les sommes sont étendues à tous les multi-indices <u>croissants</u> J,K,M,N,P, avec ici $|J| = |K| = p$, $|M| = r$, $|N| = |P| = p-r$. On convient que les symboles $\alpha_{J,K}$, dz_J, $d\bar{z}_K$ sont définis pour des multi-indices non nécessairement croissants J,K , de sorte que leurs signes soient <u>alternés</u> en J,K .

On rappelle enfin que l'opérateur $\star$ de Hodge-de Rham-Poincaré est défini sur ΛF par la relation

$$\alpha \wedge \star \beta = (\alpha|\bar{\beta}) \frac{\omega^n}{n!} .$$

Les propriétés des formes positives sont intimement liées aux opérateurs L,Λ et $\star$; la proposition 2 ci-dessous est classique, et de démonstration aisée.

PROPOSITION 2. - Soit $\alpha \in \Lambda^{p,p} F$ une forme positive (resp. fortement, faiblement positive). Alors les formes

$$L^r\alpha \in \Lambda^{p+r,p+r} F , \Lambda^r\alpha \in \Lambda^{p-r,p-r} F , \star \alpha \in \Lambda^{n-p,n-p} F$$

sont positives (resp. fortement, faiblement positives).

Les méthodes du §1 conduisent d'autre part au résultat suivant.

PROPOSITION 3. - Soit α une (p,p)-forme faiblement positive sur l'espace hilbertien (T,ω). Alors la (p,p)-forme

$$\sum_{r=o}^{p-1} \frac{p-r}{p} \frac{(p-r)!}{p!r!} L^r \Lambda^r\alpha$$

est fortement positive.

Nous aurons besoin des notations suivantes : σ décrivant l'ensemble $\mathfrak{F}$ des applications de $\{1,2,\dots,n\}$ dans le groupe des racines q-ièmes de l'unité $(q \geqslant 3)$, on pose

$$w_\sigma = \sum_{\ell=1}^{n} \overline{\sigma(\ell)}\, dz_\ell ,$$

et pour tout $\sigma = (\sigma_1,\dots,\sigma_p) \in \mathfrak{F}^p$, on pose

$$W_\sigma = w_{\sigma_1} \wedge \dots \wedge w_{\sigma_q} = \sum_L \overline{\sigma(L)}\, dz_L$$

où la somme $\sum_L$ est étendue à tous les multi-indices $L = (\ell_1,\dots,\ell_p)$, non nécessairement croissants, et où

$$\sigma(L) = \sigma_1(\ell_1) \dots \sigma_p(\ell_p) .$$

LEMME 3. - Pour tout couple de multi-indices (J,K) tels que $|J| = |K| = p$, on a l'égalité

$$q^{-np} \sum_{\sigma \in \mathfrak{F}^p} \sigma(J)\, \overline{\sigma(K)}\, W_\sigma \wedge \overline{W}_\sigma = \sum_{L,M} dz_L \wedge d\bar{z}_M$$

où la somme $\sum_{L,M}$ est étendue à tous les L,M tels que

$$\{j_s, m_s\} = \{k_s, \ell_s\} \text{ pour tout } s,\ 1 \leqslant s \leqslant p .$$

Pour $p = 1$, le lemme 3 se réduit au lemme 1, et on obtient aussitôt le cas général en observant que

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{F}^p} = \sum_{\sigma_1 \in \mathfrak{F}} \cdots \sum_{\sigma_p \in \mathfrak{F}} .$$

<u>Démonstration de la proposition 3</u>. Ecrivons

$$\alpha = \varepsilon_p \sum_{|J|=|K|=p}' \alpha_{J,K}\, dz_J \wedge d\bar{z}_K$$
$$= \frac{\varepsilon_p}{p!^2} \sum_{|J|=|K|=p} \alpha_{J,K}\, dz_J \wedge d\bar{z}_K$$

Dire que $\alpha \in WP^p$ équivaut par définition à dire que pour toute famille (x_J) décomposable, $x_J = x^1_{j_1}\, x^2_{j_2} \ldots x^p_{j_p}$, on a

$$\sum_{J,K} \alpha_{J,K}\, x_J\, \overline{x_K} \geqslant 0 .$$

Pour chaque élément $\sigma \in \mathfrak{F}^{p-1}$, la $(1,1)$-forme

$$\frac{i}{2} \sum_{j,k,|J|=|K|=p-1} \alpha_{jJ,kK}\, \sigma(J)\, \overline{\sigma(K)}\, dz_j \wedge d\bar{z}_k$$

est donc positive, ce qui entraîne que la forme $\beta(\alpha)$ suivante appartient à SP^p :

$$\beta(\alpha) = \frac{\varepsilon_p}{p!^2 q^{n(p-1)}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{F}^{p-1}} \sum_{j,k,|J|=|K|=p-1} \alpha_{jJ,kK}\, \sigma(J)\, \overline{\sigma(K)} dz_j \wedge W_\sigma \wedge d\bar{z}_k \wedge \overline{W}_\sigma .$$

D'après le lemme 3, il vient

$$\beta(\alpha) = \frac{\varepsilon_p}{p!^2} \sum_{j,k,|J|=|K|=|L|=|M|=p-1} \alpha_{jJ,kK}\, dz_{jL}\, d\bar{z}_{kM} ,$$

la somme étant prise sur les J,K,L,M tels que la somme étant prise sur les J,K,L,M tels que

$$\{j_s,m_s\} = \{k_s,\ell_s\} \quad \text{pour tout} \quad s \ , \quad 1 \leqslant s \leqslant p-1 \ .$$

Si $\{j_s,m_s\} = \{k_s,\ell_s\}$, on a ou bien $(j_s,k_s) = (\ell_s,m_s)$, ou bien $j_s = k_s \neq \ell_s = m_s$, les deux cas s'excluant mutuellement. On obtient donc

$$\beta(\alpha) = \frac{\varepsilon_p}{p!^2} \sum_{r=o}^{p-1} \binom{p-1}{r} \sum_{\substack{|J|=|K|=|p-r| \\ |N|=|P|=r}} \alpha_{JN,KN}\, dz_{JP} \wedge d\bar{z}_{KP} \ ,$$

où la somme est restreinte aux multi-indices N,P tels que $n_s \neq p_s$ pour tout $s \in \{1,\dots,r\}$. Le coefficient binomial $\binom{p-1}{r}$ apparaît parce qu'il faut choisir r indices $s \in \{1,\dots,p-1\}$ pour lesquels on aura $j_s = k_s \neq \ell_s = m_s$.
Pour tout multi-indice M de longueur $|M| = m$, définissons la "contraction" $\alpha\,[M] \in WP^{p-m}$ de α par :

$$\alpha\,[M] = \frac{\varepsilon_{p-m}}{p!^2} \sum_{|J|=|K|=p-m} \alpha_{JM,KM}\, dz_J \wedge d\bar{z}_K \ ,$$

et considérons la forme

$$\gamma(\alpha) = \frac{\varepsilon_p}{p!^2} \sum_{r=o}^{p-1} \binom{p-1}{r} \sum_{\substack{|J|=|K|=p-r \\ |N|=|P|=r}} \alpha_{JN,KN}\, dz_{JP} \wedge d\bar{z}_{KP} \ ,$$

dans laquelle la sommation est prise sans restriction sur les multi-indices N et P . Pour chaque couple (N,P) , on peut écrire $N = N'M$, $P = P'M$ où les multi-indices N' , P' ont la propriété que $n'_s \neq p'_s$ pour tout s; on observera que dans cette notation, M n'est pas nécessairement constitué des $m = |M|$ derniers indices de N et P , mais de m quelconques des r indices possibles. Si on réordonne en écrivant M à la fin, chaque couple $(N'M,P'M)$ proviendra d'exactement $\binom{r}{m}$ couples (N,P) , obtenus après avoir "mélangé" M à N' , M à P' .

De l'égalité $\binom{p-1}{r}\binom{r}{m} = \binom{p-1}{m}\binom{p-m-1}{r-m}$ résulte alors

$$\gamma(\alpha) = \frac{\varepsilon_p}{p!^2} \sum_{\substack{0\leq r\leq p-1\\ 0\leq m\leq r}} \binom{p-1}{r}\binom{r}{m} \sum_{\substack{|J|=|K|=p-r\\ |N'|=|P'|=r-m\\ |M|=m}} \alpha_{JN'M,KP'M}\, dz_{JN'M}\wedge d\bar z_{KP'M}$$

$$= \frac{1}{p!^2}\sum_{m=0}^{p-1}\binom{p-1}{m} \sum_{0\leq r-m\leq p-m-1}\binom{p-m-1}{r-m}$$

$$\times \sum_{\substack{|J|=|K|=p-m-(r-m)\\ |N'|=|P'|=r-m\\ |M|=m}} \varepsilon_{p-m}\,\alpha_{JN'M,KP'M}\, dz_{JN'}\wedge d\bar z_{KP'}\wedge \varepsilon_m\, dz_M\wedge d\bar z_M$$

$$= \sum_{m=0}^{p-1}\binom{p-1}{m}\sum_{|M|=m}\beta(\alpha[M])\wedge \varepsilon_m\, dz_M\wedge d\bar z_M ,$$

de sorte que $\gamma(\alpha)\in SP^p$. D'autre part, on a

$$\frac{1}{r!^2} L^r \Lambda^r\alpha = \varepsilon_p \sum'_{\substack{|J|=|K|=p-r\\ |N|=|P|=r}} \alpha_{JN,KN}\, dz_{JP}\wedge d\bar z_{KP}$$

$$= \frac{\varepsilon_p}{(p-r)!^2 r!^2}\sum_{\substack{|J|=|K|=p-r\\ |N|=|P|=r}} \alpha_{JN,KN}\, dz_{JP}\wedge d\bar z_{KP} ;$$

on obtient donc l'égalité suivante, qui prouve la proposition 3 :

$$\gamma(\alpha) = \sum_{r=0}^{p-1}\binom{p-1}{r}\frac{(p-r)!^2}{p!^2} L^r\Lambda^r\alpha .$$

On peut démontrer de même un résultat analogue au corollaire 1.

PROPOSITION 4. - Si α est une (p,p)-forme faiblement positive $(p\geqslant 2)$, on a l'inégalité forte

$$\alpha \leqslant_S \sum_{r=1}^{p-1}\left[n\binom{p-2}{r-1}-\binom{p-2}{r}\right]\frac{(p-r)!^2}{p!^2} L^r\Lambda^r\alpha$$

Démonstration. Avec les notations de la proposition 3 , on pose

$$\tilde\alpha_{J,K} = \sum_{j=1}^{n}\alpha_{J'j,K'j} - \alpha_{J,K} \quad \text{si } J=J'j_p,\ K=K'k_p \text{ et } j_p=k_p ,$$

$$= -\alpha_{J,K} \quad \text{si } j_p\neq k_p .$$

On prendra garde au fait que $\tilde\alpha_{J,K}$ n'est pas alterné en J et K (mais seulement par rapport aux p-1 premiers indices de J et K). Il est clair que l'expression

$$\sum_{J,K} \tilde{\alpha}_{J,K}\, x_J\, \bar{x}_K$$

est $\geqslant 0$ pour toute famille (x_J) décomposable (cf. lemme 2) ; il en résulte comme précédemment que SP^p contient la forme

$$\hat{\beta}(\alpha) = \frac{\varepsilon_p}{p!^2 q^{n(p-1)}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{F}^{p-1}} \sum_{j,k,|J|=|K|=p-1} \tilde{\alpha}_{jJ,kK}\, \sigma(J)\, \overline{\sigma(K)}\, dz_j \wedge W_\sigma \wedge d\bar{z}_k \wedge \bar{W}_\sigma$$

$$= \frac{\varepsilon_p}{p!^2} \sum \tilde{\alpha}_{jJ,kK}\, dz_{jL} \wedge d\bar{z}_{kM}$$

les sommations sur J,K,L,M étant prises pour

$|J| = |K| = |L| = |M| = p-1$, $\{j_s, m_s\} = \{k_s, \ell_s\}$ si $s \in \{1,\ldots,p-1\}$;

par conséquent

$$\hat{\beta}(\alpha) = -\frac{\varepsilon_p}{p!^2} \sum_{j,k,\ell \neq m} \alpha_{jJ\ell,kKm}\, dz_{jL\ell} \wedge d\bar{z}_{kMm}$$

$$+ (n-1)\frac{\varepsilon_p}{p!^2} \sum_{j,k,\ell,m} \alpha_{jJ\ell,kK\ell}\, dz_{jLm} \wedge d\bar{z}_{kMm} ,$$

avec $|J| = |K| = |L| = |M| = p-2$, $\{j_s, m_s\} = \{k_s, \ell_s\}$ si $s \in \{1,\ldots,p-2\}$.

Définissons la forme $\tilde{\beta}(\alpha) \in SP^p$ par

$$\tilde{\beta}(\alpha) = \hat{\beta}(\alpha) + \sum_{\ell \neq m} \beta(\alpha[\ell]) \wedge \frac{i}{2}\, dz_m \wedge d\bar{z}_m$$

$$= \hat{\beta}(\alpha) + \frac{\varepsilon_p}{p!^2} \sum_{j,k,\ell \neq m} \alpha_{jJ\ell,kK\ell}\, dz_{jLm} \wedge d\bar{z}_{kMm}$$

$$= -\frac{\varepsilon_p}{p!^2} \sum_{j,k,\ell,m} \alpha_{jJ\ell,kKm}\, dz_{jL\ell} \wedge d\bar{z}_{kMm}$$

$$+ n\frac{\varepsilon_p}{p!^2} \sum_{j,k,\ell,m} \alpha_{jJ\ell,kK\ell}\, dz_{jLm} \wedge d\bar{z}_{kMm} .$$

On vérifie comme dans la démonstration de la proposition 3 qu'on a l'égalité

$$\sum_{m=o}^{p-2} \binom{p-2}{m} \sum_{|M|=m} \tilde{\beta}(\alpha[M]) \wedge \varepsilon_m\, dz_M \wedge d\bar{z}_M$$

$$= -\sum_{r=o}^{p-2} \binom{p-2}{r} \frac{(p-r)!^2}{p!^2}\, L^r \Lambda^r \alpha$$

$$+ n \sum_{r=o}^{p-2} \binom{p-2}{r} \frac{(p-r-1)!^2}{p!^2}\, L^{r+1} \Lambda^{r+1} \alpha .$$

Comme le premier membre est une (p, p)- forme fortement positive, la proposition 4 est démontrée.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat essentiel de ce paragraphe.

THEOREME 3. - Soit α une (p,p)-forme faiblement positive $(1 \leqslant p \leqslant n)$. On a les inégalités fortes

$$- C'(n,p) \frac{1}{p!^2} L^{p-1} \Lambda^{p-1} \alpha \leqslant_S \alpha \leqslant_S C(n,p) \frac{1}{p!^2} L^{p-1} \Lambda^{p-1} \alpha$$

où les constantes positives $C(n,p)$, $C'(n,p)$ sont définies par

$$C(n,1) = 1 \quad , \quad C'(n,1) = 0 \ ,$$

$$C(n,2) = n \quad , \quad C'(n,2) = 1 \ ,$$

$$C(n,p) + C'(n,p) = \frac{(n+1)!}{(n-p+2)!} \ ,$$

et la relation de récurrence

$$C'(n,p) = \sum_{r-1}^{p-1} \binom{p-1}{r} C(n-r,p-r) \ .$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur p , en utilisant les propositions 3 et 4. Lorsque $p = 1$, on peut choisir

$$C(n,p) = 1 \quad , \quad C'(n,p) = 0 \ .$$

On observe que, pour tout entier $r \geqslant 1$,

$$\Lambda^r \alpha = \frac{p!^2}{(p-r)!^2} \sum_{|M|=r} \alpha[M] \ ,$$

et que $\alpha[M]$ ne fait intervenir que les variables dont les indices appartiennent au complémentaire $\complement M$ de M . Si $L_{\complement M}$ et $\Lambda_{\complement M}$ désignent les opérateurs L et Λ relatifs à ces variables, on obtient par hypothèse de récurrence

$$\alpha[M] \leqslant_S C(n-r,p-r) \frac{1}{(p-r)!^2} L_{\complement M}^{p-r-1} \Lambda_{\complement M}^{p-r-1} \alpha[M] \ .$$

Comme $\Lambda_{\complement M}^{p-r-1} \alpha[M] = \Lambda^{p-r-1} \alpha[M]$, il vient

$$\alpha[M] \leqslant_S C(n-r,p-r) \frac{1}{(p-r)!^2} L_{\complement M}^{p-r-1} \Lambda^{p-r-1} \alpha[M]$$

$$\leqslant_S C(n-r,p-r) \frac{1}{(p-r)!^2} L^{p-r-1} \Lambda^{p-r-1} \alpha[M] \ ,$$

car la $(1,1)$-forme $\Lambda^{p-r-1} \alpha[M]$ est dans $WP^1 = SP^1$; en appliquant l'opérateur L^r qui conserve les inégalités fortes (proposition 2), on obtient après sommation sur M :

$$L^r \Lambda^r \alpha \leqslant_S \frac{C(n-r,p-r)}{(p-r)!^2} L^{p-1} \Lambda^{p-1} \alpha \quad .$$

Les propositions 3 et 4 montrent qu'on peut prendre

$$C(n,p) = \sum_{r=1}^{p-1} [n\binom{p-2}{r-1} - \binom{p-2}{r}] C(n-r,p,r)$$

(car le terme entre crochets est toujours $\geqslant 0$) et

$$C'(n,p) = \sum_{r=1}^{p-1} \binom{p-1}{r} C(n-r,p-r) \quad .$$

Grâce à la relation $\binom{p-1}{r} = \binom{p-2}{r} + \binom{p-2}{r-1}$, on voit que

$$C(n,p) = \sum_{r=1}^{p-1} [(n+1) \binom{p-2}{r-1} - \binom{p-1}{r}] C(n-r,p-r)$$

$$= (n+1) (C'(n-1,p-1) + C(n-1,p-1)) - C'(n,p) \quad .$$

On en déduit aussitôt

$$C(n,p) + C'(n,p) = (n+1)\dots(n-p+3) = \frac{(n+1)!}{(n-p+2)!} \quad . \blacksquare$$

Nous avons maintenant besoin de la majoration suivante, dont la démonstration est immédiate (se ramener au cas d'une forme $\beta = \varepsilon_p \, dz_J \wedge d\bar{z}_J$, $|J| = p$).

LEMME 4. - Pour toute forme $\beta \in SP^p$ et tout entier $k \leqslant p$, on a

$$\beta \leqslant_S \frac{(p-k)!}{p!k!} L^k \Lambda^k \beta \quad .$$

En appliquant cette inégalité pour $k = 1$ à la forme $\beta = \Lambda^{p-1}\alpha \in WP^1 = SP^1$, on obtient (la notation $\mathrm{Tr}\,\alpha$ désignant le scalaire $\frac{1}{p!} \Lambda^p \alpha$) :

COROLLAIRE 2. - Si $\alpha \in WP^p$, on a les inégalités fortes

$$- C'(n,p) \,\mathrm{Tr}\,\alpha \,.\, \frac{\omega^p}{p!} \leqslant_S \alpha \leqslant_S C(n,p) \,\mathrm{Tr}\,\alpha \,.\, \frac{\omega^p}{p!}$$

avec les constantes du théorème 3 , et

$$C(n,0) = 1 \; , \; C'(n,0) = 0 \; .$$

Comme l'opérateur $\star$ conserve la trace $\operatorname{Tr}\alpha$ et la positivité forte, on peut d'ailleurs remplacer dans le corollaire 2

$$C(n,p) \quad \text{par} \quad \operatorname{Inf}(C(n,p),C(n,n-p)) \ ,$$

$$C'(n,p) \quad \text{par} \quad \operatorname{Inf}(C'(n,p),C'(n,n-p)) \ .$$

Ces dernières constantes ne sont malheureusement pas optimales. Ainsi pour $p = 2$:

PROPOSITION 5. - Si $\alpha \in WP^2$, alors $\alpha \leqslant_S \frac{n}{2} \cdot \operatorname{Tr}\alpha \cdot \frac{\omega^2}{2}$.

Démonstration. Si $\alpha = \frac{\varepsilon_2}{4} \sum_{j,k,\ell,m} \alpha_{j\ell,km}\, dz_j \wedge dz_j \wedge d\bar{z}_k \wedge d\bar{z}_m$, nous savons (voir la démonstration de la proposition 3) que la forme

$$\beta(\alpha) = \alpha + \frac{\varepsilon_2}{4} \sum_{j,k,\ell\neq m} \alpha_{j\ell,k\ell}\, dz_j \wedge dz_m \wedge d\bar{z}_k \wedge d\bar{z}_m$$

est fortement positive. En utilisant le lemme 4 avec $p = k = 2$, on trouve

$$\alpha \leqslant_S \beta(\alpha) \leqslant_S \operatorname{Tr}(\beta(\alpha)) \cdot \frac{\omega^2}{2} \ ,$$

avec $$\operatorname{Tr}(\beta(\alpha)) = \operatorname{Tr}\alpha + \frac{1}{4} \sum_{j\neq\ell\neq m\neq j} \alpha_{j\ell,j\ell} = \frac{n}{2} \cdot \operatorname{Tr}\alpha \ .$$

=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=

B I B L I O G R A P H I E

[1] DEMAILLY (J.P.).
Scindage holomorphe d'un morphisme de fibrés vectoriels semi-positifs avec estimations L^2 , à paraître.

[2] DEMAILLY (J.P.) et SKODA (H.).
Relations entre les notions de positivités de P.A. GRIFFITHS et de S. NAKANO pour les fibrés vectoriels, Séminaire P. LELONG-H. SKODA. (Analyse), 19ème année, 1978-79, Lecture Notes n° 822,1980,Springer-Verlag,Berlin,Heidelberg,New York.

[3] DOUADY (A.) et VERDIER (J.L.).
Séminaire de Géométrie analytique, E.N.S., 1972-73, Différents aspects de la positivité, Astérisque 17, 1974, Société Mathématique de France.

[4] GRIFFITHS (P.A.).
Hermitian differential geometry, Chern classes and positive vector bundles, Global Analysis, Princeton University Press, p. 185-251, 1969.

[5] LELONG (P.).
Integration of a differential form on an analytic complex subvariety, Proc. Nat. Acad. Sc. of U.S.A., t. 43, p. 246-248, 1957.

[6] NAKANO (S.).
Vanishing theorems for weakly 1-complete manifolds II, Publ. RIMS, Kyoto University, p. 133-139, 1974.

[7] SCHNEIDER (M.).
Lefschetz theorems and a vanishing theorem of Grauert-Riemenschneider, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 30, Several Complex Variables, Amer, Math. Society Providence, t. 2, p. 35-39, 1977.

[8] SKODA (H.).
Morphismes surjectifs de fibrés vectoriels semi-positifs, Annales scient. de l'Ecole Normale Supérieure, 4^e série, t.11,p.577-611, 1978.