Moyenne arithmético-géométrique, intégrales elliptiques et calcul de π

Jean-Pierre Demailly

Université Joseph Fourier Grenoble I

`http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/books.html`

version du 18 mars 2008

0. Introduction

L'objectif de ce texte est d'expliquer le lien entre la moyenne arithmético-géométrique et les intégrales elliptiques, découvert par C.F. Gauss en 1799 alors qu'il avait 22 ans[1]. On démontrera ensuite la relation de Legendre (1811), qui fournit une méthode de calcul de π extrêmement efficace. Elle aurait donc déjà pu être découverte au début du 19e siècle, mais il fallut en réalité attendre les travaux de Brent et Salamin en 1976 pour que cette méthode soit explicitement suggérée comme moyen de calcul de π.

1. Moyenne arithmético-géométrique

Étant donnés deux réels $a,\ b > 0$, on considère les suites (a_n), (b_n) définies par la relation de récurrence $(a_0, b_0) = (a, b)$ et

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}. \end{cases}$$

Comme les termes d'indices $n \geqslant 1$ restent inchangés si on permute a et b, il n'est pas restrictif de supposer $a \geqslant b > 0$. Dans ce cas, nous affirmons que (a_n) est une suite décroissante, que (b_n) est une suite croissante, et que les deux suites sont adjacentes. En effet

$$a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 = \left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)^2 - a_n b_n = \left(\frac{a_n - b_n}{2}\right)^2 \geqslant 0, \tag{1.1}$$

on a donc $a_n \geqslant b_n$ pour tout $n \geqslant 1$. Ceci implique $a_{n+1} \leqslant a_n$ et $b_{n+1} \geqslant b_n$ pour tout $n \geqslant 0$, par conséquent

$$b = b_0 \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant b_{n+1} \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant a_0 = a. \tag{1.2}$$

Comme les suites sont monotones et bornées, leurs limites $\alpha = \lim a_n$ et $\beta = \lim b_n$ existent, et la relation $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ entraîne $\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ d'où $\alpha = \beta$. Ceci implique bien que les suites sont adjacentes. On note

$$M(a, b) = \lim a_n = \lim b_n \tag{1.3}$$

---

[1] voir aussi: A. Chambert-Loir, S. Fermigier et V. Maillot, *Exercices d'analyse pour l'agrégation, Analyse 1 (Topologie, suites et séries, intégration)*, Paris : Masson, 230 p., (1995).

leur limite commune, appelée *moyenne arithmético-géométrique* de a et b, et on pose de plus

$$c_n = \sqrt{a_n^2 - b_n^2}. \tag{1.4}$$

Il vient d'après (1.1) $c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - b_n)$, donc c_n décroît vers 0 et

$$c_n^2 = (a_n - b_n)(a_n + b_n) = 4c_{n+1}a_{n+1} \quad \Rightarrow \quad c_{n+1} \leqslant \frac{c_n^2}{4M(a,b)}.$$

En posant $M = M(a,b)$, ceci se récrit $c_{n+1}/4M \leqslant (c_n/4M)^2$, donc on voit par récurrence que $c_n/4M \leqslant (c_{n_0}/4M)^{2^{n-n_0}}$. Il s'agit d'une convergence de type quadratique : si n_0 est pris tel que $c_{n_0}/4M \leqslant 10^{-1}$, on va avoir

$$a_n - b_n = 2c_{n+1} \leqslant 8M\, 10^{-2^{n+1-n_0}}, \tag{1.5}$$

soit déjà environ $2^{10} > 1000$ décimales exactes pour $n = n_0 + 9$.

2. Intégrales elliptiques

Pour a, $b > 0$ on introduit les intégrales

$$I(a,b) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}}, \qquad J(a,b) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\, dt. \tag{2.1}$$

Il est facile de voir que le périmètre de l'ellipse de demi-axes a, b est égal à $4\,J(a,b)$, et pour cette raison, ces intégrales ont été appelées intégrales elliptiques. Il est évident que $I(b,a) = I(a,b)$ et $J(b,a) = J(a,b)$ en faisant le changement de variable $t \mapsto \frac{\pi}{2} - t$.

3. Transformation de Landen

À l'aide d'un changement de variable astucieux, appelé transformation de Landen, on va montrer que $I(a,b)$ et $J(a,b)$ satisfont les relations

$$I(a_1,b_1) = I(a,b), \tag{3.1}$$

$$2\,J(a_1,b_1) = J(a,b) + ab\, I(a,b), \tag{3.2}$$

où $a_1 = \dfrac{a+b}{2}$ et $b_1 = \sqrt{ab}$ comme au § 1. Le changement de variable consiste à poser

$$u = t + \mathrm{Arc}\tan\Big(\frac{b}{a}\tan t\Big).$$

Il réalise une bijection croissante de $[0, \pi/2[$ sur $[0, \pi[$, et peut se prolonger différentiablement à $[0, \pi/2]$ comme on va le voir. On a en effet

$$\frac{du}{dt} = 1 + \frac{\frac{b}{a}(1+\tan^2 t)}{1 + (\frac{b}{a})^2\tan^2 t} = 1 + \frac{ab(\cos^2 t + \sin^2 t)}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} = \frac{(a+b)(a\cos^2 t + b\sin^2 t)}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}.$$

D'autre part, si $\varphi \in [0, \pi/2[$, on a

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} \quad \text{et} \quad \sin\varphi = \frac{\tan\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}.$$

En posant $\varphi = \operatorname{Arc}\tan\left(\frac{b}{a}\tan t\right)$ et $u = t + \varphi$, ceci implique $\tan\varphi = \frac{b}{a}\tan t$ et

$$\begin{aligned}
\cos u &= \cos t\ \cos\varphi - \sin t\ \sin\varphi \\
&= \cos t \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2\tan^2 t}} - \sin t \frac{\frac{b}{a}\tan t}{\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2\tan^2 t}} = \frac{a\ \cos^2 t - b\ \sin^2 t}{\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}}, \\
\sin u &= \sin t\ \cos\varphi + \cos t\ \sin\varphi \\
&= \sin t \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2\tan^2 t}} + \cos t \frac{\frac{b}{a}\tan t}{\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2\tan^2 t}} = \frac{(a+b)\sin t\cos t}{\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}}.
\end{aligned}$$

On en déduit alors

$$\begin{aligned}
a_1^2\cos^2 u + b_1^2\sin^2 u &= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\left(\cos^2 u + \frac{4ab}{(a+b)^2}\sin^2 u\right) \\
&= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{(a\ \cos^2 t - b\ \sin^2 t)^2 + 4ab\ \sin^2 t\cos^2 t}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} \\
&= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{(a\ \cos^2 t + b\ \sin^2 t)^2}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t},
\end{aligned}$$

soit, en posant $\Delta(t) = \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}$

$$\Delta_1(u) = \sqrt{a_1^2\cos^2 u + b_1^2\sin^2 u} = \frac{a+b}{2}\frac{a\ \cos^2 t + b\ \sin^2 t}{\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}}.$$

En combinant ceci avec le calcul de du/dt qui donne

$$du = \frac{(a+b)(a\cos^2 t + b\sin^2 t)}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt,$$

il vient

$$\frac{1}{2}\frac{du}{\Delta_1(u)} = \frac{1}{2}\frac{du}{\sqrt{a_1^2\cos^2 u + b_1^2\sin^2 u}} = \frac{dt}{\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}} = \frac{dt}{\Delta(t)}. \tag{3.3}$$

Après intégration, nous obtenons

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{du}{\sqrt{a_1^2\cos^2 u + b_1^2\sin^2 u}} = \int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}},$$

d'où la relation (3.1) par symétrie des intégrales sur $[0,\pi/2]$ et $[\pi/2,\pi]$. Pour obtenir (3.2), nous observons que

$$\Delta_1(u) + \frac{a-b}{2}\cos u = \frac{1}{2}\frac{(a+b)(a\,\cos^2 t + b\,\sin^2 t) + (a-b)(a\,\cos^2 t - b\,\sin^2 t)}{\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}}$$

$$(3.4) \qquad = \frac{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}{\sqrt{a^2\cos^2 + b^2\sin^2 t}} = \Delta(t),$$

$$\Delta_1(u) - \frac{a-b}{2}\cos u = \frac{1}{2}\frac{(a+b)(a\,\cos^2 t + b\,\sin^2 t) - (a-b)(a\,\cos^2 t - b\,\sin^2 t)}{\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}}$$

$$(3.5) \qquad = \frac{ab\cos^2 t + ab\sin^2 t}{\sqrt{a^2\cos^2 + b^2\sin^2 t}} = \frac{ab}{\Delta(t)}.$$

En faisant la somme, nous trouvons

$$(3.6) \qquad 2\,\Delta_1(u) = \Delta(t) + \frac{ab}{\Delta(t)}.$$

La relation (3.3) donne par ailleurs $du = 2\frac{\Delta_1(u)}{\Delta(t)}dt$, donc en multipliant (3.4) par du il s'ensuit

$$(3.7) \qquad \Delta_1(u)\,du + \frac{a-b}{2}\cos u\,du = \Delta(t)\,du = 2\Delta_1(u)\,dt = \Big(\Delta(t) + \frac{ab}{\Delta(t)}\Big)dt.$$

Comme $\int_0^\pi \cos u\,du = 0$, nous obtenons après intégration pour $t\in[0,\pi/2]$ et $u\in[0,\pi]$:

$$2\,J(a_1,b_1) = J(a,b) + ab\,I(a,b),$$

ce qu'il fallait démontrer. □

4. Évaluation des intégrales elliptiques

On utilise la moyenne arithmético-géométrique $M = M(a,b) = \lim a_n = \lim b_n$. La relation (3.1) donne par récurrence $I(a,b) = I(a_n,b_n)$, et il est facile de voir qu'il y a convergence uniforme vers l'intégrale $I(M,M) = \frac{\pi/2}{M}$. On obtient donc déjà la formule célèbre due à C.F. Gauss

$$(4.1) \qquad I(a,b) = \frac{\pi/2}{M(a,b)}.$$

La formule (3.2) implique par ailleurs

$$\begin{aligned} 2\big(J(a_1,b_1) - a_1^2 I(a_1,b_1)\big) &= J(a,b) + ab\,I(a,b) - 2\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2 I(a,b) \\ &= J(a,b) - \frac{a^2+b^2}{2}I(a,b) \\ &= J(a,b) - a^2\,I(a,b) + \frac{1}{2}c^2 I(a,b) \end{aligned}$$

et en remplaçant (a,b) par (a_{n-1}, b_{n-1}) on en déduit de même

$$2\big(J(a_n,b_n) - a_n^2 I(a_n,b_n)\big) = J(a_{n-1},b_{n-1}) - a_{n-1}^2\, I(a_{n-1},b_{n-1}) + \frac{1}{2} c_{n-1}^2 I(a,b).$$

En multipliant par 2^{n-1}, il vient aisément par récurrence

$$2^n\big(J(a_n,b_n) - a_n^2 I(a_n,b_n)\big) = J(a,b) - a^2\, I(a,b) + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} 2^j c_j^2 I(a,b). \tag{4.2}$$

Nous affirmons que le membre de gauche tend vers 0 du fait de la convergence rapide. En effet on a les inégalités

$$\frac{\pi}{2} b \leqslant J(a,b) \leqslant \frac{\pi}{2} a, \qquad \frac{\pi}{2a} \leqslant I(a,b) \leqslant \frac{\pi}{2b},$$

donc

$$\frac{\pi}{2}\Big(b - \frac{a^2}{b}\Big) \leqslant J(a,b) - a^2 I(a,b) \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \big|J(a,b) - a^2 I(a,b)\big| \leqslant \frac{\pi}{2b}(a^2 - b^2) = \frac{\pi}{2b} c^2,$$

et par conséquent

$$2^n \big|J(a_n,b_n) - a_n^2 I(a_n,b_n)\big| \leqslant 2^n \frac{\pi}{2b_n} c_n^2 \leqslant 2^n \frac{\pi}{2b} c_n^2,$$

ce qui tend vers zéro du fait de la convergence super-exponentielle de c_n. À la limite, la relation (4.2) implique la formule

$$J(a,b) = I(a,b)\Big(a^2 - \sum_0^{+\infty} 2^{n-1} c_n^2\Big) = \frac{\pi}{2}\, \frac{a^2 - \sum_0^{+\infty} 2^{n-1} c_n^2}{M(a,b)} \tag{4.3}$$

qui permet d'évaluer efficacement $J(a,b)$ (et donc le périmètre de l'ellipse $= 4\,J(a,b)$).

5. Relation de Legendre

Soit a, b, c des réels > 0 tels que $a^2 = b^2 + c^2$ et a_n, b_n, c_n comme au paragraphe 1. Nous avons

$$I(a_1, b_1) = I(a,b) \tag{5.1}$$

et comme $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $c_1 = \frac{a-b}{2}$, il vient

$$I(a_1, c_1) = I\Big(\frac{a_1 + c_1}{2}, \sqrt{a_1 c_1}\Big) = I(a/2, c/2) = 2\, I(a,c). \tag{5.2}$$

Par ailleurs

$$J(a_1, b_1) = \frac{1}{2}\big(J(a,b) + ab\, I(a,b)\big), \tag{5.3}$$

et donc

$$J(a,c) = 2\,J(a/2,c/2) = 2\,J\Big(\frac{a_1+c_1}{2}, \sqrt{a_1c_1}\Big) = J(a_1,c_1) + a_1c_1I(a_1,c_1),$$

ce qui implique

$$J(a_1,c_1) = J(a,c) - \frac{c^2}{2}I(a,c). \tag{5.4}$$

La relation de Legendre consiste à évaluer l'expression

$$E(a,b) = I(a,b)J(a,c) + I(a,c)J(a,b) - a^2I(a,b)I(a,c).$$

Pour cela, on va chercher la transformée de $E(a,b)$ par l'opération de moyenne arithmético-géométrique. D'après (5.1–5.4), on trouve

$$\begin{aligned}
E(a_1,b_1) &= I(a_1,b_1)J(a_1,c_1) + I(a_1,c_1)J(a_1,b_1) - a_1^2I(a_1,b_1)I(a_1,c_1)\\
&= I(a,b)\Big(J(a,c) - \frac{c^2}{2}I(a,c)\Big) + 2\,I(a,c)\frac{1}{2}\Big(J(a,b) + ab\,I(a,b)\Big)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - 2\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2 I(a,b)I(a,c)\\
&= E(a,b).
\end{aligned}$$

On a par conséquent $E(a,b) = E(a_n,b_n)$ et il est naturel de chercher à évaluer la limite quand $n \to +\infty$. Nous avons d'une part

$$\lim I(a_n,b_n) = I(M,M) = \frac{\pi/2}{M}, \quad \lim J(a_n,c_n) = J(M,0) = \int_0^{\pi/2} M\cos t\,dt = M.$$

D'autre part, comme $a \geqslant c$, on a aussi $I(a,c) \leqslant \frac{\pi}{2c}$, et la majoration de $J(a,b) - a^2I(a,b)$ par $(\pi/2b)c^2$ obtenue au 4. entraîne alors

$$\big|I(a,c)J(a,b) - a^2I(a,b)I(a,c)\big| = I(a,c)\big|J(a,b) - a^2I(a,b)\big| \leqslant \frac{\pi^2}{4b}c.$$

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} I(a_n,c_n)J(a_n,b_n) - a_n^2I(a_n,b_n)I(a_n,c_n) = 0$ et donc

$$E(a,b) = \lim E(a_n,b_n) = I(M,M)J(M,0) = \frac{\pi}{2}.$$

Ceci donne la relation de Legendre reliant les intégrales elliptiques :

$$I(a,b)J(a,c) + I(a,c)J(a,b) - a^2I(a,b)I(a,c) = \frac{\pi}{2}. \tag{5.5}$$

6. Formule de Brent-Salamin pour π

On applique la formule de Legendre avec $a = 1$ et $0 < b < 1$, $b' = c = \sqrt{1-b^2}$. Si nous désignons par c'_n la suite associée au calcul de la moyenne arithmético-géométrique $M(a, b')$, on obtient grâce à (4.3)

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} &= I(1,b)J(1,b') + I(1,b')J(1,b) - I(1,b)I(1,b') \\ &= I(1,b)I(1,b')\Big(1 - \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n-1}c_n^2 - \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n-1}c_n'^2\Big)\end{aligned}$$

Comme $c_0 = c = b'$ et $c'_0 = \sqrt{1-b'^2} = b$, on a $c_0^2 + c_0'^2 = 1$, donc $1 - 2^{-1}(c_0^2 + c_0'^2) = \frac{1}{2}$. En multipliant l'égalité précédente par 2 il vient

$$\pi = I(1,b)I(1,b')\Big(1 - \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n(c_n^2 + c_n'^2)\Big) = \frac{\pi^2}{4\,M(1,b)M(1,b')}\Big(1 - \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n(c_n^2 + c_n'^2)\Big)$$

Ceci fournit la formule proposée par Richard Brent[(2)] et Eugene Salamin[(3)]

$$\pi = \frac{4\,M(1,b)M(1,b')}{1 - \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n(c_n^2 + c_n'^2)}, \qquad \forall b, b' > 0,\quad b^2 + b'^2 = 1. \tag{5.1}$$

Le choix le plus simple consiste à prendre $b = b' = 2^{-1/2}$, pour lequel on a

$$\pi = \frac{4\,M(1,2^{-1/2})^2}{1 - \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n+1}c_n^2}. \tag{5.2}$$

On effectuera par exemple le calcul de a_n, b_n jusqu'à l'indice n, puis $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, et on prendra l'approximation

$$\pi_n = \frac{4\,a_{n+1}^2}{1 - \sum_{j=1}^{n} 2^{j+1}c_j^2}. \tag{5.2}$$

Analysons rapidement l'erreur. Comme on a $b_{n+1} \leqslant M \leqslant a_{n+1}$, l'erreur au numérateur est majorée par $4(a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2) = 4c_{n+1}^2$, tandis qu'au dénominateur elle est d'un ordre plus grand, soit $2^{n+2}c_{n+1}^2 + O(2^{n+3}c_{n+2}^2)$. Si δ désigne le dénominateur de (5.2), on a $\pi = 4M^2/\delta$ et $c_{n+1} \leqslant c_n^2/4M$ avec $b_1 = 2^{-1/4} \leqslant M \leqslant a_0 = 1$. Ceci donne pour l'erreur l'équivalent

$$\begin{aligned}|\pi_n - \pi| \sim \frac{4M^2}{\delta}\Big(\frac{1 + c_{n+1}^2/M^2}{1 - 2^{n+2}c_{n+1}^2/\delta} - 1\Big) \sim \frac{4M^2}{\delta^2}2^{n+2}c_{n+1}^2 = \frac{\pi^2}{4M^2}2^{n+2}c_{n+1}^2 \\ \sim \frac{\pi^2}{16M^4}2^n c_n^4 \leqslant 1.2\;2^n c_n^4.\end{aligned}$$

(2) R.P. Brent, *Multiple-precision zero-finding methods and the complexity of elementary function evaluation*, Traub, J.F., ed., Analytic Computational Complexity (1975), 151–176.

(3) E. Salamin, *Computation of π using arithmetic-geometric mean*, Mathematics of computation, vol. 30, **135** (1976), 565-570.

Le calcul à l'aide d'un logiciel comme PARI/GP fournit

$$c_1/4M \leqslant c_1/4b_1 = 0.04289 < 10^{-1},$$

donc $c_n \leqslant 4M\,10^{-2^{n-1}}$ d'après (1.5) ; par conséquent, on obtiendra déjà largement plus de deux milliards de décimales exactes pour $n = 30$. Comme on dispose d'algorithmes très efficaces pour calculer les sommes, produits, quotients et racines de grands nombres (algorithme de Schönhage-Strassen[4] reposant sur l'utilisation de la transformée de Fourier rapide ou FFT[5]), on sait également calculer π de manière ultra-rapide – le temps de calcul de N décimales croît presque linéairement en N, de l'ordre de $N(\log N)^2$, soit à peine plus que le temps N nécessaire pour seulement écrire le résultat ...

L'algorithme de la moyenne arithmético-géométrique a d'autres avatars intéressants, par exemple la formule suivante due elle aussi à C.F. Gauss

$$e^\pi = 32 \prod_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big)^{2^{-n+1}}.$$

(4) A. Schönhage and V. Strassen, *Schnelle Multiplikation großer Zahlen*, Computing **7** (1971), 281–292.

(5) J.W. Cooley and J.W. Tukey, *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series*, Math. Comput. **19** (1965) 297–301.

7. Code pour PARI/GP

L'implémentation du code avec un logiciel comme PARI/GP est extrêmement simple. Voici un exemple de tel code "`salamin.gp`" pour un calcul avec environ 1000 décimales exactes (moins de dix itérations suffisent) :

```
default(colors,"9, 5, no, no, 4");

v=1000;
default(realprecision,v+20);

init()=
{
n=0;
a=1;b=1/sqrt(2);
a1=(a+b)/2;                           /* prochaine itération de a */
d=1;f=2;                                         /* f stocke $2^{n+1}$ */
decimales=1;
}

iterer()=
{
local(s,c,c2,p,u);       /* a,b,a1 valent $a_n, b_n, a_{n+1} = (a_n + b_n)/2$ */
c=a1-b;                                 /* $c_{n+1} = (a_n - b_n)/2$ */
n=n+1;
b=sqrt(a*b);                              /* b stocke $b_n$ nouveau */
a=a1;                                     /* a stocke $a_n$ nouveau */
s=a+b;                                         /* s vaut $2a_{n+1}$ */
f=2*f;                                          /* f vaut $2^{n+1}$ */
c2=c*c;
u=f*c2;                                      /* u vaut $2^{n+1}c_n^2$ */
d=d-u;                      /* $d = 1 - \sum_{1\leqslant j\leqslant n} 2^{j+1}c_j^2$ */
p=s*s/d;                                     /* s*s $= 4a_{n+1}^2$ */
a1=s/2;
erreur=0.6*u*c2;                         /* majorant $1.2\,2^n c_n^4$ */
decimales=floor(-log(erreur)/log(10));
if(decimales>v+10,decimales=v);
print("n = ", n, ", decimales attendues = ", decimales);
print("pi = ", p);
print();
}

init;
while(decimales<v,iterer());
```

Pour exécuter le programme taper "`gp salamin.gp`".

Le procédé de sommation d'Euler

Soit $a > 0$ un réel, et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle ou complexe. On lui associe la suite $(\tilde{u}_n)$ telle que

$$\tilde{u}_n = \frac{1}{(1+a)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k u_k \tag{1}$$

(le procédé de sommation d'Euler le plus classique correspond au choix $a = 1$).

Théorème. *Si la suite (u_n) converge vers une limite ℓ, alors la suite $(\tilde{u}_n)$ converge également vers ℓ.*

Démonstration. Comme $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k = (1+a)^n$, on a

$$\tilde{u}_n - \ell = \frac{1}{(1+a)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k(u_k-\ell) \quad\Longrightarrow\quad \big|\tilde{u}_n-\ell\big| \leqslant \frac{1}{(1+a)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\big|u_k-\ell\big|.$$

Soit M un majorant de $|u_n|$, de sorte que $|\ell| \leqslant M$ et $|u_n-\ell| \leqslant 2M$. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que pour tout $k \geqslant N$ on ait $|u_k-\ell| \leqslant \varepsilon$. Découpons la sommation en les indices $k \leqslant N-1$ et $k \geqslant N$, en supposant $n \geqslant N$. Nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+a)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\big|u_k-\ell\big| &\leqslant \frac{1}{(1+a)^n}\Big(\sum_{k=0}^{N-1}\binom{n}{k}a^k\times 2M + \sum_{k=N}^{n}\binom{n}{k}a^k\varepsilon\Big)\\ &\leqslant \varepsilon + 2M\frac{1}{(1+a)^n}\sum_{k=0}^{N-1}\binom{n}{k}a^k.\end{aligned}$$

Pour $0 < \delta < 1$ (par exemple $\delta = 1/2$), on voit par ailleurs que

$$\frac{1}{(1+a)^n}\sum_{k=0}^{N-1}\binom{n}{k}a^k \leqslant \frac{\delta^{1-N}}{(1+a)^n}\sum_{k=0}^{N-1}\binom{n}{k}(\delta a)^k \leqslant \delta^{1-N}\Big(\frac{1+\delta a}{1+a}\Big)^n$$

tend vers 0 quand $n \to +\infty$, donc on peut choisir $N_1 > N$ tel que $n \geqslant N_1$ implique

$$\frac{1}{(1+a)^n}\sum_{k=0}^{N-1}\binom{n}{k}a^k \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Ceci montre que $|\tilde{u}_n-\ell| \leqslant 2\varepsilon$ pour $n \geqslant N_1$, et le théorème est démontré. $\square$

Pour transformer une série $\sum_{n\geqslant 0}u_n$, on applique le procédé précédent à la suite des sommes partielles

$$s_n = \sum_{0\leqslant k<n}u_k \quad\Longrightarrow\quad u_n = s_{n+1}-s_n.$$

La transformation d'Euler donne une nouvelle suite

$$\tilde{s}_n = \frac{1}{(1+a)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k s_k$$

qui correspond aux sommes partielles de la série $\sum \tilde{u}_n$ de terme général

$$\tilde{u}_n = \tilde{s}_{n+1} - \tilde{s}_n = \frac{1}{(1+a)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n+1}{k} - (1+a)\binom{n}{k} \right) a^k s_k.$$

Comme $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$, il vient

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n &= \frac{1}{(1+a)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} - a\binom{n}{k} \right) a^k s_k \\ &= \frac{1}{(1+a)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} (s_{k+1} - s_k) \\ &= \frac{a}{(1+a)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k u_k. \end{aligned}$$

On voit donc que pour les séries, le procédé de sommation d'Euler consiste à transformer une série $\sum u_n$ en la série $\sum \tilde{u}_n$ de terme général

$$\tilde{u}_n = \frac{a}{(1+a)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k u_k. \tag{2}$$

D'après le théorème ci-dessus, le procédé préserve la convergence des séries et la valeur de leur somme, ceci pour tout $a > 0$.

Exemple 1. On considère la série entière du logarithme népérien

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad x \in]0,1].$$

En choisissant $a = \frac{1}{x}$, on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n &= \frac{1/x}{(1+1/x)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} x = \frac{1}{(1+1/x)^{n+1}} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k t^k \, dt \\ &= \frac{1}{(1+1/x)^{n+1}} \int_0^1 (1-t)^n \, dt = \frac{1}{(n+1)(1+1/x)^{n+1}}. \end{aligned}$$

On trouve l'identité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(1+1/x)^{n+1}},$$

qui équivaut à $\ln(1+x) = -\ln(1-\frac{1}{1+1/x})$. On observera que le membre de droite améliore très notablement la convergence de la série, en particulier pour $x=1$ (on passe d'une convergence lente à une convergence géométrique).

Exemple 2. On considère la série entière de la fonction Arc tan

$$\operatorname{Arc\,tan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad x \in]0,1].$$

En choisissant $a = \frac{1}{x^2}$, on obtient

$$\begin{aligned}\tilde{u}_n &= \frac{1/x^2}{(1+1/x^2)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} x \\ &= \frac{1/x}{(1+1/x^2)^{n+1}} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k t^{2k}\, dt = \frac{1/x}{(1+1/x^2)^{n+1}} \int_0^1 (1-t^2)^n\, dt.\end{aligned}$$

La valeur de l'intégrale $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t\,dt$ est un grand classique (cf. formule de Wallis), on trouve la relation de récurrence $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$ et il en résulte

$$I_0 = 1, \qquad I_n = \frac{2\cdot 4 \cdot \cdots \cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot 2n+1} \quad \text{pour } n \geqslant 1.$$

On obtient l'identité intéressante

$$\operatorname{Arc\,tan} x = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+1/x^2)^{n+1}} \frac{2\cdot 4\cdot \cdots \cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot 2n+1}, \tag{3}$$

et en particulier, il résulte des égalités $\operatorname{Arc\,tan}(1) = \frac{\pi}{4}$ et $\operatorname{Arc\,tan} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ les formules très simples suivantes découvertes par Euler :

$$\begin{aligned}\pi &= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot 2n+1}, \\ \pi &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-n}\, n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot 2n+1},\end{aligned}$$

dont la convergence est approximativement en 2^{-n}, resp. 4^{-n}. On peut bien sûr aussi combiner (3) avec les formules du type de celle de J. Machin

$$\pi = 16 \operatorname{Arc\,tan} \frac{1}{5} - 4 \operatorname{Arc\,tan} \frac{1}{239}.$$

En utilisant un argument de prolongement analytique pour les fonctions $\mathbb{R}$-analytiques, il n'est pas difficile de voir que (3) reste vrai pour tout $x > 0$.

Code pour PARI/GP.

Initialiser par

```
u=3*sqrt(3)/2;s=u;n=0;
```

puis itérer la ligne

```
n=n+1;u=n*u/(4*n+2);s=s+u
```