

Objets fractals : illustration de quelques concepts et outils mathématiques

*Jean-Pierre Demailly
Institut Fourier, Université de Grenoble I*

Conférence donnée le jeudi 15 mai dans la cadre du module du Collège Doctoral UJF
« Du chaos à la complexité : vers l'émergence d'une thématique pluridisciplinaire »
(Maison des Sciences de l'Homme, du mardi 13 mai au jeudi 15 mai 2008).

(Version du 25 mai 2008)

Le concept de dimension

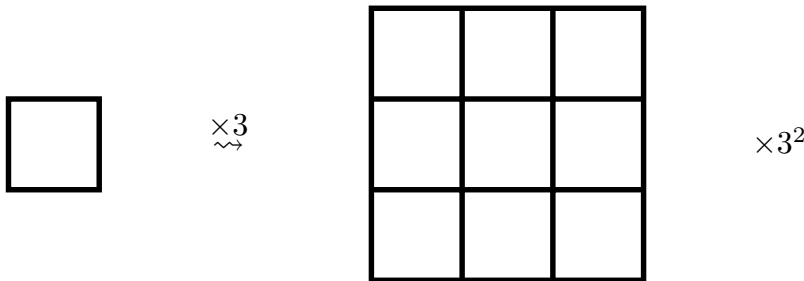
La dimension d'un « espace » (ensemble de points dans lequel on se place) est classiquement le *nombre de coordonnées* nécessaires pour repérer un point de cet espace. C'est donc a priori un *nombre entier*. On va introduire ici une notion plus générale, qui conduit à des dimensions non nécessairement entières.

Objet de dimension 1



Par une homothétie de rapport 3, la mesure (longueur) est multipliée par $3 = 3^1$, l'objet résultant contient 3 fois l'objet initial. La dimension d'un segment est 1.

Objet de dimension 2

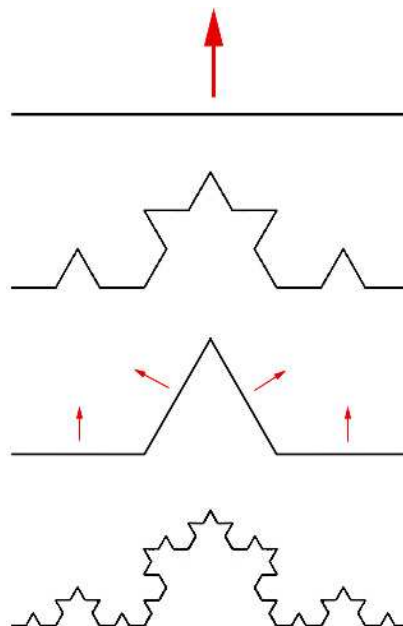
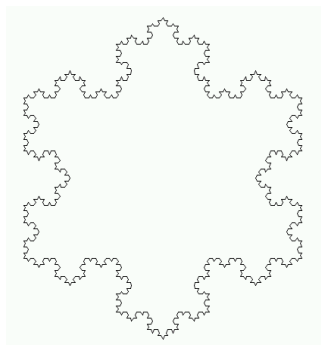


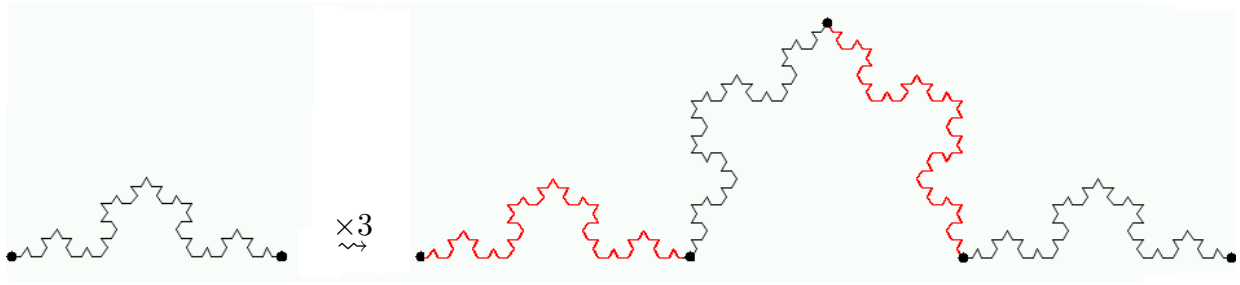
Par une homothétie de rapport 3, la mesure (aire) de l'objet est multipliée par $9 = 3^2$, l'objet résultant contient 9 fois l'objet initial. La dimension du carré est 2.

En généralisant, *pour un objet de dimension d* , l'effet d'une homothétie de rapport 3 est de *multiplier la mesure par 3^d* .

Qu'en est-il d'un ensemble fractal ?

*Prenons l'exemple
de la courbe de Koch
(ou flocon de neige)
obtenue par itération
du procédé ci-contre →*





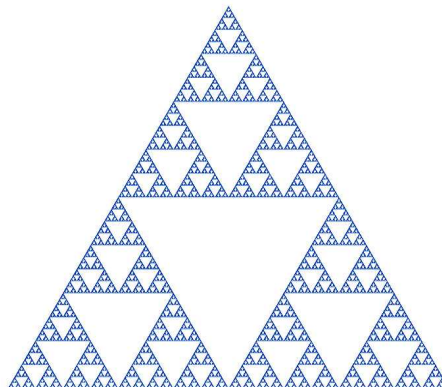
Par une homothétie de rapport 3, l'objet devient un objet de nature identique, contenant 4 morceaux de même taille que l'objet initial, donc de mesure 4 fois plus grande. Ceci conduit à poser

$$3^d = 4 \quad \Longrightarrow \quad d = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.26185950714\dots$$

Il nous faut admettre ici que la dimension n'est pas un entier, mais un nombre compris strictement entre 1 et 2 !

Il est facile de voir d'autre part que la longueur de la courbe de Koch est infinie : à chaque itération, la longueur est multipliée par $4/3$, donc si le segment initial est pris pour unité, la longueur de la n -ième itération est $(4/3)^n$, ce qui tend vers l'infini. D'autre part, l'aire est nulle. En effet, par récurrence sur le nombre d'itérations, on voit que la courbe de Koch est entièrement contenue dans le triangle isocèle ayant pour base le segment initial et une hauteur égale à $\sqrt{3}/6$ fois cette base. Comme la n -ième itération découpe dans la courbe de Koch 4^n parties dont la taille est homothétique à la courbe toute entière dans le rapport 3^{-n} , celle-ci est contenue dans une réunion de 4^n petits triangles d'aire $\sqrt{3}/12 \times (3^{-n})^2$, soit une aire totale $\sqrt{3}/12 \times 4^n \times 9^{-n}$, qui tend bien vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$.

A titre d'exercice, on pourra chercher à évaluer la dimension du « triangle de Sierpinski » figuré ci-dessous. Ce fractal est obtenu en partant d'un triangle équilatéral, puis en enlevant le triangle central dans un découpage en 4 triangles semblables dans le rapport $1/2$. On répète ensuite indéfiniment le procédé sur tous les triangles obtenus à chaque étape.



On montrera facilement que l'aire du triangle de Sierpinski est nulle. De manière analogue, on construit le « tapis de Sierpinski » en partant d'un carré, en le divisant en 9 carrés homothétiques dans le rapport $1/3$ et en enlevant le carré central. Dans l'espace de dimension 3, l'« éponge de Sierpinski » est obtenue à partir d'un cube divisé en 27 petits cubes, privé du cube central. On montrera que son aire est infinie, tandis que le volume est nul.

Mesures de Hausdorff

Les considérations qui précèdent se généralisent à l'aide des mesures p -dimensionnelles introduites par Felix Hausdorff (1868-1942) – l'un des fondateurs de la topologie moderne.

Si (\mathcal{E}, d) est un espace métrique quelconque, on définit la mesure de Hausdorff p -dimensionnelle d'une partie A de \mathcal{E} par

$$\mathcal{H}_p(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_{p,\varepsilon}(A), \quad \mathcal{H}_{p,\varepsilon}(A) = \inf_{\text{diam } A_i \leq \varepsilon} \sum_i (\text{diam } A_i)^p$$

où $\mathcal{H}_{p,\varepsilon}(A)$ est la borne inférieure des sommes $\sum_i (\text{diam } A_i)^p$ étendue à toutes les partitions dénombrables $A = \bigcup A_i$ avec $\text{diam } A_i \leq \varepsilon$.

Intuitivement, on cherche à paver A par des parties A_i dont on évalue la p -mesure comme si elles étaient des « hyper-cubes » de dimension p , puis on améliore la précision en demandant que le diamètre des A_i tende vers zéro.

On montre que \mathcal{H}_p définit une « mesure borélienne dénombrablement additive », c'est-à-dire qu'elle est définie sans ambiguïté sur tous les ouverts, fermés et leurs unions, intersections finies ou dénombrables répétées autant de fois que l'on veut, avec la propriété que $\mathcal{H}_p(\bigcup A_i) = \sum_i \mathcal{H}_p(A_i)$ pour de parties boréliennes disjointes – sur les parties non boréliennes, on obtient seulement une « mesure extérieure » qui vérifie $\mathcal{H}_p(\bigcup A_i) \leq \sum_i \mathcal{H}_p(A_i)$.

Dans $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$ avec sa structure euclidienne habituelle, cette mesure coïncide pour p entier avec la mesure d'aide euclidienne p -dimensionnelle, à un facteur de proportionnalité près égal au volume de la boule euclidienne de dimension p et de diamètre 1. Ces mesures permettent de donner une définition précise de la « dimension de Hausdorff » :

Définition. Si (\mathcal{E}, d) est un espace métrique et A une partie de \mathcal{E} , on dit que A est de dimension de Hausdorff égale à p_0 si on a

$$\mathcal{H}_p(A) = +\infty \quad \text{pour } p < p_0 \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_p(A) = 0 \quad \text{pour } p > p_0.$$

Il est facile de voir que dans \mathbb{R}^n , la dimension d'une partie quelconque est toujours de dimension $\leq n$ (c'est-à-dire que $\mathcal{H}_p(A) = 0$ pour $p > n$) : on pourra pour cela commencer par montrer que la \mathcal{H}_p -mesure d'un n -cube est nulle pour $p > n$, puis utiliser la sous-additivité dénombrable à l'aide d'un recouvrement de A par des cubes. Par ailleurs, en général, on ne peut rien dire sur $\mathcal{H}_{p_0}(A)$, cette valeur peut très bien être nulle, finie ou infinie.

Systemes dynamiques discrets

L'une des facons les plus usuelles d'obtenir des objets fractal est de considerer un « systeme dynamique ». D'un point de vue mathematique, il s'agit simplement de considerer une certaine transformation continue $f : X \rightarrow X$ d'un espace X , puis de regarder l'evolution des points par iteration de f . Autrement dit, etant donne un point initial x_0 , on regarde la suite definie par la relation de recurrence $x_{n+1} = f(x_n)$, c'est-à-dire encore ce qu'on appelle l'orbite de x_0 sous l'action des composees successives

$$f^{[n]} = f \circ f \circ \dots \circ f : X \rightarrow X, \quad x_n = f^{[n]}(x_0).$$

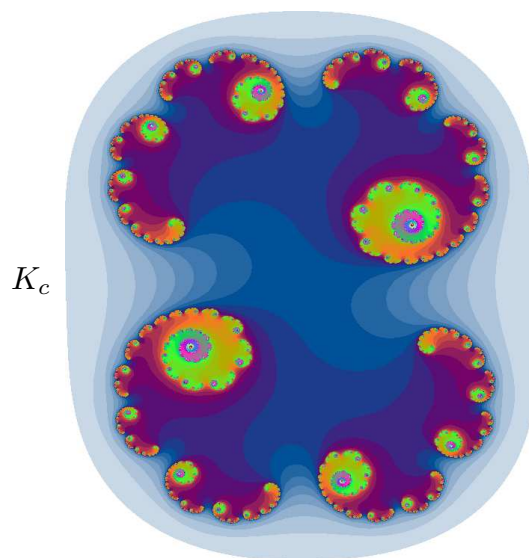
En mathematiques, on cherche toujours à etudier d'abord les situations non triviales les plus simples possibles. L'une de celles-ci consiste à regarder dans le plan complexe \mathbb{C} la transformation quadratique

$$P_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad P_c(z) = z^2 + c \text{ où } c \text{ est un paramètre.}$$

On considere donc l'orbite $z_n = P_c^{[n]}(z_0)$ d'un point $z_0 \in \mathbb{C}$ donne. On notera que $P_c^{[2]}(z) = (z^2 + c)^2 + c$ est un polynome de degre 4 ; de maniere generale, $P_c^{[n]}$ est un polynome de degre 2^n . On introduit par definition :

Ensemble de Julia de P_c . On appelle ensemble de Julia rempli K_c l'ensemble des points initiaux z_0 tels que la suite (z_n) reste bornee, et ensemble de Julia le bord $J_c = \partial K_c$ de l'ensemble de Julia rempli K_c .

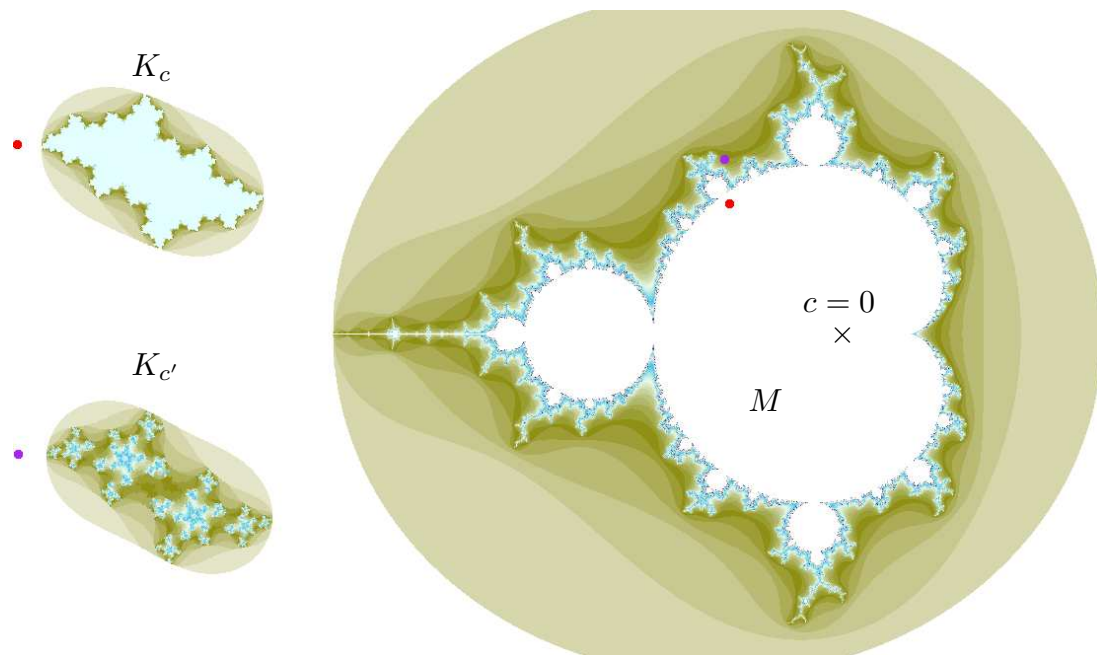
Si $c = 0$, on a simplement $P_0^{[n]}(z) = z^{2^n}$ et on voit aussitot que K_0 consiste en le disque unite ferme $|z| \leq 1$ (donc J_0 est le cercle unite). Pour tout autre valeur $c \neq 0$ on obtient un ensemble fractal. Voici par exemple une image de J_c et K_c pour la valeur $c = 0,328075517 + 0,022051744i$ du parametre :



On notera que si on remplace z_0 par $z'_0 = z_1 = P_c(z_0)$, on obtient la meme suite avec simplement un decalage d'indice, donc $z_0 \in K_c$ si et seulement si $z'_0 = P_c(z_0) \in K_c$. Par consequent, ceci montre que $P_c(K_c) = K_c$ et $P_c^{-1}(K_c) = K_c$, autrement dit J_c et K_c sont **auto-similaires** sous l'action de la transformation P_c .

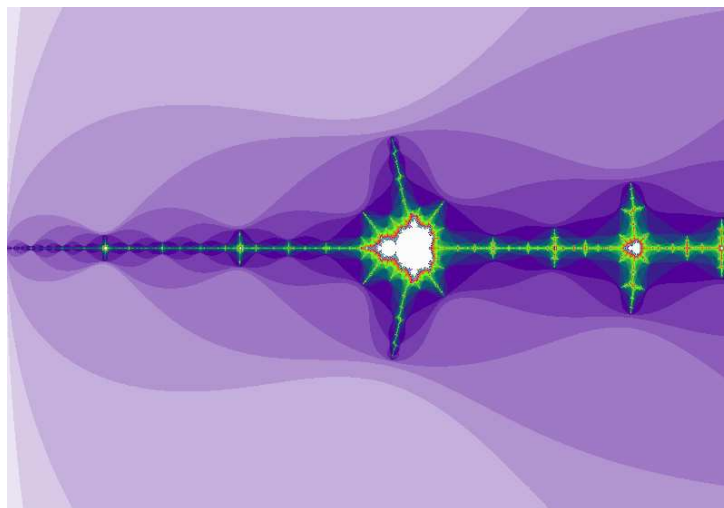
La propriété d'autosimilarité est une caractéristique assez générale des objets fractals - notamment tous ceux obtenus par le procédé qui vient d'être décrit. Il existe cependant des objets fractals plus compliqués, comme l'ensemble de Mandelbrot (du nom du mathématicien franco-américain Benoît Mandelbrot, né à Varsovie en 1924).

Ensemble de Mandelbrot *C'est l'ensemble M des valeurs complexes c du paramètre telles que l'ensemble de Julia K_c associé à P_c soit connexe.*

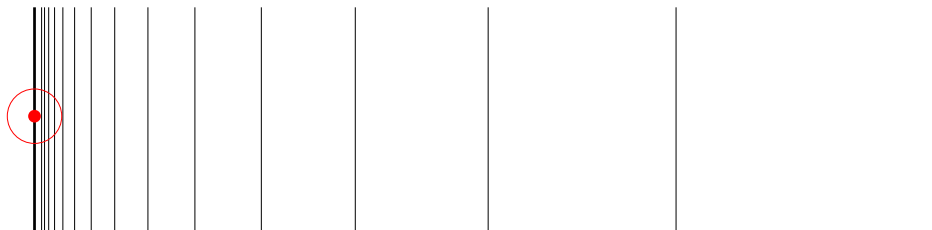


L'ensemble de Mandelbrot M consiste en le domaine intérieur blanc de la partie droite de l'image (avec ses infinies ramifications ...). Sur cette partie droite figurent aussi la position de deux valeurs complexes c et c' (points rouge et violet), et, à gauche, les ensembles de Julia associés K_c et $K_{c'}$. On voit que K_c est connexe, donc c est dans l'ensemble de Mandelbrot, tandis que $K_{c'}$ n'est pas connexe, donc c' n'est pas dans M .

Si on note M_{z_0} l'ensemble des valeurs de c telles que la suite z_n de point initial $z_0 = 0$ soit bornée, on peut démontrer que l'on a en fait $M = M_0$. L'ensemble de Mandelbrot M est seulement partiellement auto-similaire ; il comporte des parties qui sont des répliques approximatives de l'ensemble complet, mais aussi d'autres qui sont dissemblables :



La structure de M est beaucoup plus compliquée que celle des ensembles de Julia J_c , comme il est déjà apparent sur les images ci-dessus. On sait par exemple que M est connexe, mais on ne sait pas à ce jour si M est localement connexe ; rappelons qu'un espace est dit localement connexe si tout point admet des voisinages connexes arbitrairement petits. L'espace appelé « peigne dénombrable » est un exemple typique d'espace connexe non localement connexe :



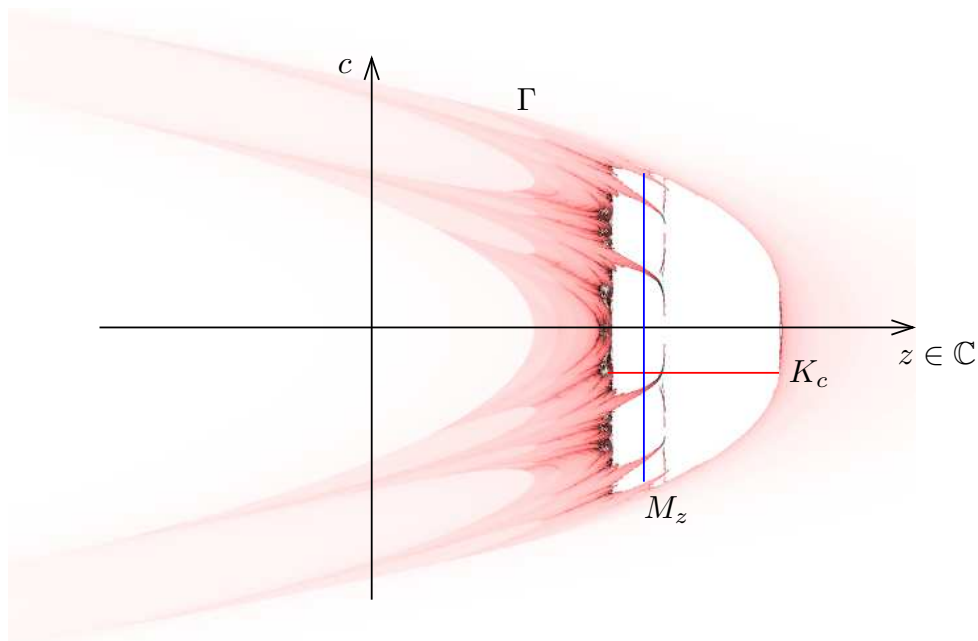
Le mathématicien japonais Shishikura a pu démontrer en 1992 que la frontière de l'ensemble de Mandelbrot est de dimension de Hausdorff 2 (donc maximale dans le plan), mais on ne sait pas si sa mesure 2-dimensionnelle est nulle ou non (les experts pensent que cette mesure est bien nulle, avis aux amateurs !).

Pour obtenir l'image de $M = M_0$ à l'aide d'un programme d'ordinateur, on procède comme suit. On convient d'une valeur assez grande, disons 10^9 , qui teste le caractère non borné de la suite, et un nombre d'itérations assez grand, disons $N = 150$. Étant donné une valeur complexe c fixée représentée par un pixel de l'écran d'ordinateur, on calcule la suite z_n telle que $z_0 = 0$ et $z_{n+1} = P_c(z_0)$, pour $n \leq N = 150$. Si toutes ces valeurs restent inférieures à 10^9 , il est probable que la suite (z_n) est bornée, donc on décide que $c \in M$ (ou du moins dans son approximation calculée par l'ordinateur), et on affecte la couleur blanche au pixel. Sinon il existe une valeur $n_0 < N = 150$ telle que $|z_n| \leq 10^9$ pour $n \neq n_0$, et $|z_n| > 10^9$ pour $n = n_0 + 1$. On arrête alors le calcul en estimant que la suite (z_n) va tendre vers l'infini, et on affecte au pixel une couleur (brunâtre ou violette dans les deux images de la page précédente) qui dépend de la valeur de n_0 : sur la schéma ci-dessus, la couleur est d'autant plus foncée que n_0 est plus grand. Ceci donne les zones colorées qui « entourent » l'ensemble de Mandelbrot. En réalité, il ne s'agit pas d'un simple artifice de représentation graphique, ces zones colorées ont une signification mathématique et physique. On peut en effet regarder les fonctions

$$G_n(z, c) = 2^{-n} \log_+ |P_c^{[n]}(z)|$$

où $\log_+ t = \max(0, \log t)$ est la partie positive du logarithme. Du fait que $P_c^{[n]}$ est de degré 2^n , on peut démontrer assez facilement que $G_n(z, c)$ converge vers une fonction $G(z, c) \geq 0$ qui est nulle sur le graphe $\Gamma = \{(z, c) \in \mathbb{C}^2 ; z \in K_c\}$ (là où la suite $P_c^{[n]}(z)$ est bornée), et strictement positive en dehors de Γ . La valeur de $G(z, c)$ mesure la vitesse à laquelle la suite tend vers l'infini. Comme les fonctions holomorphes sont harmoniques, on vérifie facilement que $\Delta_z G(z, c) = 0$ pour $z \notin J_c$. La fonction $z \mapsto G(z, c)$ s'interprète comme le potentiel électrostatique créé par un conducteur métallique cylindrique qui aurait la forme de K_c , et dont le bord $J_c = \partial K_c$ serait chargé électriquement. Les zones colorées évoquées plus haut sont délimitées par les lignes équipotentielles ...

L'ensemble Γ est quand à lui un ensemble fractal de complexité monstrueuse dans \mathbb{C}^2 (donc dans un espace de dimension réelle 4), dont les tranches $c = \text{Cte}$ sont les ensembles de Julia remplis K_c , tandis que les tranches $z = \text{Cte}$ sont les ensembles de Mandelbrot M_z .



Le programme `gnofract4d` permet d'explorer ce fractal quadridimensionnel. Pour les experts, signalons que le $(1,1)$ -courant positif $T = i\partial\bar{\partial}G(z, c)$ dans \mathbb{C}^2 a précisément comme support l'intérieur de Γ , ses tranches sont donc les ensembles M_z et J_c . La théorie des courants positifs est un outil essentiel de l'analyse complexe contemporaine, particulièrement pour l'étude des systèmes dynamiques holomorphes ...

Logiciels

Voici 3 logiciels libres assez agréables à utiliser :

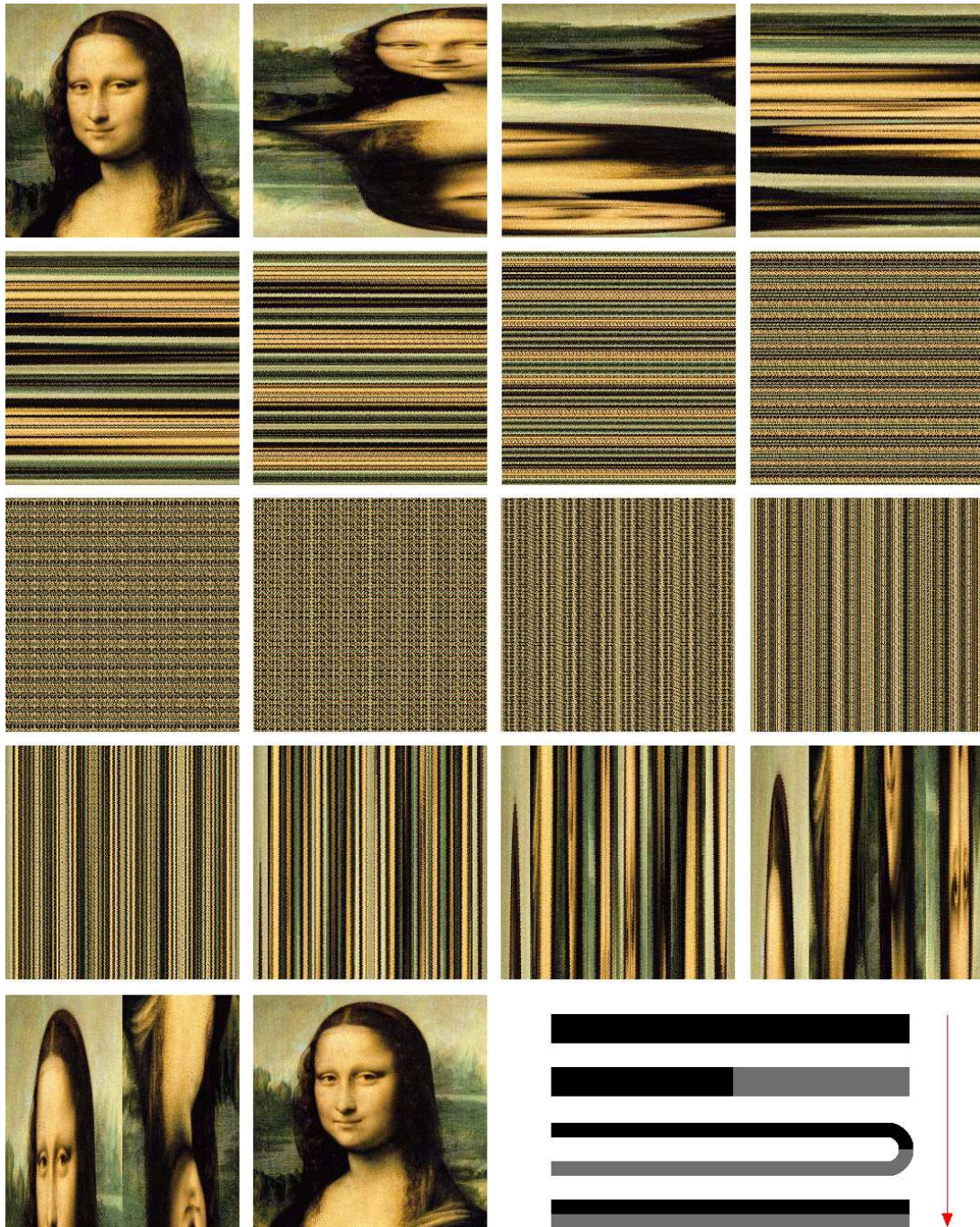
- Fractint : <http://www.fractint.org> (Linux/MacOS X/Windows)
- Xaos : <http://wmi.math.u-szeged.hu/xaos/doku.php> (Linux/MacOS X/Windows)
- Gnofract4d : <http://gnofract4d.sourceforge.net/> (Linux/MacOS X)

Sous Windows, un logiciel réputé (mais non libre) est :

- Ultrafractal : <http://www.ultrafractal.com>

L'entropie topologique

On considère de nouveau une transformation $f : X \rightarrow X$, et on cherche à mesurer « combien f mélange » l'espace X . Voici une illustration de la transformation dite du boulanger (ou de la « pâte feuilletée »), du carré unité dans lui-même, itérée 17 fois :



La transformation du carré $X = [0, 1]^2$ figurée ci-dessus est donnée par

$$f(x, y) = (2x, (1 + y)/2) \text{ si } x \leq 1/2, \quad f(x, y) = (2x - 1, (1 - y)/2) \text{ si } x \geq 1/2.$$

La périodicité d'ordre 17 observée ici est un artefact dû à la discrétisation de l'image en carrés de 256×256 pixels.

En réalité la transformation du boulanger est apériodique et conduirait à un mélange parfait de l'image si celle-ci était non discrétisée.

D'un point de vue mathématique, le mélange plus ou moins grand provoqué par la transformation f est décrit par un nombre appelé « entropie topologique ». Voici une définition précise, due à Bowen et Dinaburg.

Définition. Soit (X, d) un espace métrique compact et $f : X \rightarrow X$ une application (supposée en général continue). On définit une nouvelle distance d_n en posant

$$d_n(x, y) = \max\{d(f^{[i]}(x), f^{[i]}(y)) : 0 \leq i < n\}.$$

On appelle $N(n, \varepsilon)$ le nombre maximum de points de X qui sont à des distances mutuelles $\geq \varepsilon$ pour d_n . Alors l'entropie topologique de f est définie comme étant le nombre

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N(n, \varepsilon) \right).$$

Dans le cas où la transformation f est périodique de période n_0 , le nombre $N(n, \varepsilon)$ ne croît plus quand $n \geq n_0$ et on voit donc que $h_{\text{top}}(f) = 0$. Intuitivement, f n'entraîne alors ni mélange ni perte d'information quand le nombre n d'itérations tend vers $+\infty$.

À l'attention des experts, nous voudrions signaler que l'entropie topologique est liée à des invariants topologiques importants de la transformation f . Voici les deux résultats les plus significatifs dans cette direction.

Inégalité de Yomdin. Si f est une transformation C^∞ d'une variété compacte X alors

$$h_{\text{top}}(f) \geq \log \rho(f_*)$$

où $\rho(f_*)$ est le rayon spectral de la transformation linéaire induite en homologie

$$f_* : H_*(X, \mathbb{R}) \rightarrow H_*(X, \mathbb{R})$$

c'est-à-dire sa plus grande valeur propre, comme endomorphisme de l'espace vectoriel de dimension finie $H_*(X, \mathbb{R})$.

Égalité de Gromov-Yomdin. Si f est une transformation algébrique d'une variété projective complexe X , on a l'égalité :

$$h_{\text{top}}(f) = \log \rho(f_*).$$

Logiciel utilisé :

La transformation du boulanger a été calculée et illustrée au moyen du programme Java `transfo.jar` disponible sur la page « Les transformations bijectives d'images » par Jean-Paul Delahaye et Philippe Mathieu, à l'URL

<http://www2.lifl.fr/~mathieu/transform/>

Flots de champs de vecteurs

L'étude de l'évolution de systèmes physiques au cours du temps se ramène très fréquemment à l'étude d'équations différentielles portant sur des paramètres dépendant du temps t . Pour un système physique complexe, il y a en général un grand nombre de paramètres (position des particules, température, pression, ...).

Très souvent, l'équation différentielle à étudier fait intervenir des dérivées d'ordre supérieur à un. C'est presque toujours le cas en mécanique, puisque la relation fondamentale de la dynamique met en jeu l'accélération $\gamma = d^2x/dt^2$. Dans cette situation, il est toujours possible de se ramener à un système d'équations différentielles d'ordre 1 en augmentant le nombre de paramètres : dans le cas de l'accélération par exemple, il suffit d'introduire la vitesse $v = dx/dt$ comme paramètre supplémentaire, ce qui transforme une équation en $t, x, dx/dt, dx^2/dt^2$ en un système d'équations portant seulement sur $t, x, v, dx/dt = v$ et dv/dt .

De manière générale, d'un point de vue mathématique, on est ramené à l'étude d'un espace de phase Ω qui est (localement au moins) un domaine d'un espace \mathbb{R}^n avec n assez grand, et une équation d'évolution de la forme

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \overrightarrow{V}(M), \quad M = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$$

dans cet espace de phases, où $M \mapsto \overrightarrow{V}(M), \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est ce qu'on appelle un champ de vecteurs sur l'espace Ω . Autrement dit, on doit étudier un système différentiel de la forme

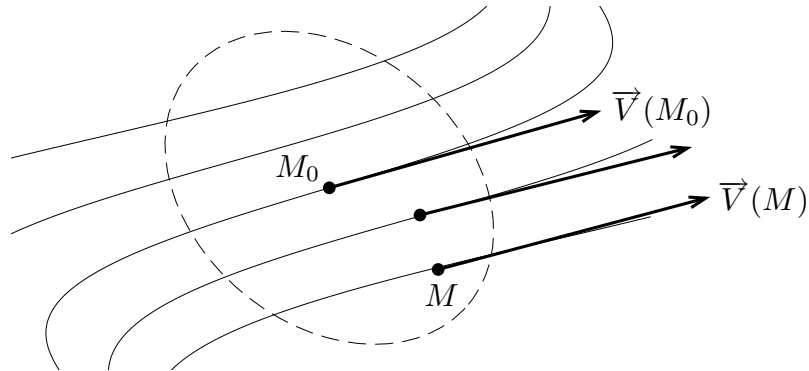
$$(S) \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = V_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = V_n(x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

Le cas où le champ $\overrightarrow{V}(M)$ dépend lui aussi du temps se ramène aussi à ce formalisme en introduisant la variable supplémentaire $x_{n+1} = t$ (avec l'équation évidente $dx_{n+1}/dt = 1$).

D'un point de vue mathématique, toutes les équations différentielles dépendant de la seule variable temporelle se ramènent donc à des systèmes du type (S) précédent, aux notations près. Le point $M = (x_1, \dots, x_n)$ doit être vu ici comme une description de l'état du système. Étant donné un état M_0 , il est particulièrement important de comprendre ce qui se passe au voisinage : le théorème dit de *Cauchy-Lipschitz* affirme que si les fonctions $V_j(M)$ sont différentiables et de dérivées bornées, il existe toujours une solution unique $M(t)$ telle que $M(0) = M_0$ sur un certain intervalle de temps $] -a, a[$ contenant 0 : on peut donc prédire exactement l'évolution sur un petit intervalle de temps vers le futur, et calculer aussi les états antérieurs à partir de l'état connu en $t = 0$. De manière surprenante, si les fonctions V_j ne sont que continues, l'état du système peut être imprédictible, comme on le voit déjà avec l'équation $dx/dt = 2\sqrt{|x|}$ qui admet deux solutions $x(t) = 0$ et $x(t) = t^2$ partant du même état initial $x(0) = 0$!

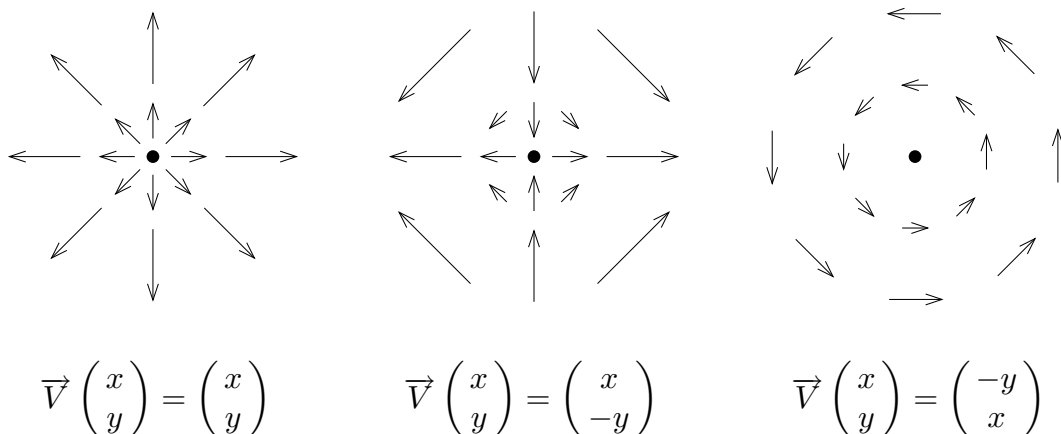
L'étude qualitative des solutions locales du système (S) dépend beaucoup de la valeur du vecteur $\overrightarrow{V}(M_0)$ dans l'état initial.

Premier cas : $\vec{V}(M_0) \neq \vec{0}$. Dans ce cas, l'angle entre $\vec{V}(M)$ et $\vec{V}(M_0)$ tend vers 0 quand M tend vers 0. Par conséquent, les tangentes aux lignes intégrables sont sensiblement parallèles les unes aux autres dans un petit voisinage de M_0 . Un tel point M_0 est dit régulier :



On peut démontrer dans cette situation qu'il existe localement un changement de coordonnées $(x_i) \mapsto (X_i)$ dans l'espace des phases Ω , qui ramène le système (S) à celui défini par un champ constant : les trajectoires sont donc simplement des droites parallèles parcourues à vitesse uniforme (mais seulement dans les nouvelles coordonnées, pas dans les anciennes). L'étude locale est donc en fait extrêmement simple dans ce cas.

Deuxième cas : $\vec{V}(M_0) = \vec{0}$. On voit alors facilement sur des exemples qu'il y a plusieurs configurations géométriques possibles pour le champ des tangentes, ceci déjà en dimension 2 :



Si $\vec{V}(M_0) = \vec{0}$, on dit que M_0 est un *point singulier* du champ de vecteurs. Un tel point donne évidemment une solution constante $M(t) = M_0$ de (S) , ce qui correspond physiquement à un « état d'équilibre ». Cependant, il y a toujours de petites imprécisions dans la description d'un système physique, on est donc amené à se demander ce qui se passe pour des états évoluant à partir d'un état initial très proche de M_0 .

On va étudier ici assez précisément ce qui se passe en dimension 2.

Après translation éventuelle des coordonnées, on peut supposer $M_0 = (0, 0)$. On a alors par hypothèse $V_1(0, 0) = V_2(0, 0) = 0$, de sorte que le système différentiel peut se récrire

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = V_1(x, y) = ax + by + o(|x| + |y|) \\ \frac{dy}{dt} = V_2(x, y) = cx + dy + o(|x| + |y|). \end{cases}$$

(en notant les coordonnées (x, y) plutôt que (x_1, x_2)). Si on introduit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial V_1 / \partial x(0, 0) & \partial V_1 / \partial y(0, 0) \\ \partial V_2 / \partial x(0, 0) & \partial V_2 / \partial y(0, 0) \end{pmatrix}.$$

le système différentiel (S) peut être approximé près de $(0, 0)$ par le système *linéaire*

$$(S_1) \quad \frac{dM}{dt} = AM$$

on dit que (S_1) est une *approximation linéaire* de (S) . En général, si le point singulier est *non dégénéré*, c'est-à-dire si $\det A \neq 0$, les solutions de (S_1) constituent une bonne approximation des solutions de (S) au voisinage de $(0, 0)$ – du moins si la matrice A n'est pas trop particulière.

Le gros avantage est qu'on connaît explicitement les solutions d'un tel système linéaire – quelle que soit la dimension d'ailleurs – elles sont données par $M(t) = e^{tA} M_0$ où e^{tA} est l'exponentielle matricielle.

Lorsque la matrice A est diagonalisable avec toutes ses valeurs propres réelles ou complexes, disons

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

dans les nouvelles coordonnées X_i , les solutions sont données simplement par

$$X_i(t) = e^{\lambda_i t} X_{i,0}.$$

Le comportement dépend alors de manière cruciale du signe de la partie réelle de ces valeurs propres : si $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, la coordonnée X_i va converger vers « l'état d'équilibre » $X_i = 0$, tandis que si $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$, toute petit écart initial $X_{i,0}$ par rapport à la position d'équilibre $X_i = 0$ finira par entraîner une très grande déviation (le cas $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$ est indéterminé, comme on le verra plus loin).

La stabilité est donc essentiellement liée au signe des valeurs propres du système linéarisé près d'un point critique. On peut démontrer le théorème important suivant :

Théorème. *Pour qu'un système différentiel $(S) : \overrightarrow{dM}/dt = \overrightarrow{V}(M)$ possède un état d'équilibre stable M_0 (en un point singulier M_0 tel que $\overrightarrow{V}(M_0) = \overrightarrow{0}$), il suffit que la matrice $A = (\partial V_i / \partial x_j(M_0))$ associée au système linéarisé ait toutes ses valeurs propres complexes λ_i de partie réelle $\operatorname{Re} \lambda_i$ strictement négative.*

Cas d'un champ linéaire de vecteurs en dimension 2

Pour fixer les idées nous allons donner la représentation graphique des solutions de tous les systèmes linéaires non dégénérés de dimension 2, donc des systèmes du type

$$(S) \quad \frac{dM}{dt} = AM, \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases} \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det(A) = ad - bc \neq 0.$$

La discussion dépend de manière essentielle de ce que sont les valeurs propres λ_1, λ_2 .

(a) Les valeurs propres λ_1, λ_2 de A sont réelles.

• Supposons de plus $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dans ce cas la matrice A est diagonalisable. Après changement de base on peut supposer

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

et le système se réduit à

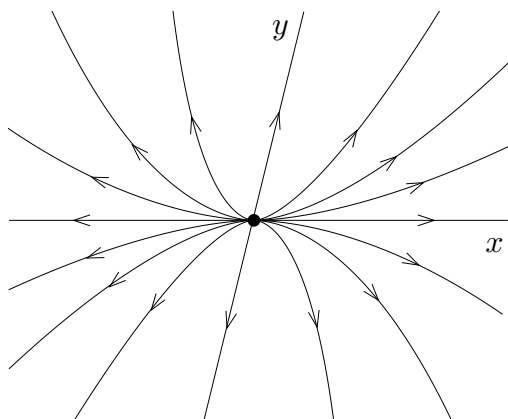
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda_1 x \\ \frac{dy}{dt} = \lambda_2 y \end{cases} \quad \text{de solution} \quad \begin{cases} x(t) = x_0 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) = y_0 e^{\lambda_2 t}, \end{cases}$$

de sorte que les courbes intégrales sont les courbes

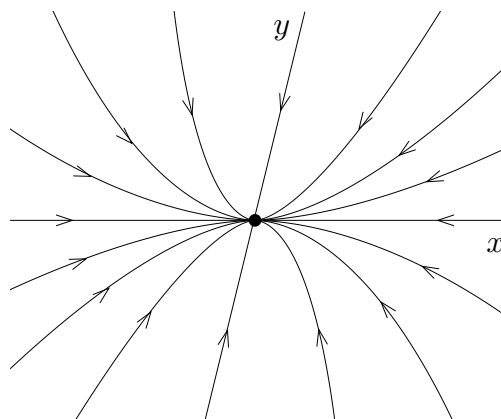
$$y = C|x|^{\lambda_2/\lambda_1}, \quad C \in \mathbb{R}$$

et la droite d'équation $x = 0$. Distinguons deux sous-cas :

* λ_1, λ_2 de même signe et, disons, $|\lambda_1| < |\lambda_2|$. On a alors $\lambda_2/\lambda_1 > 1$. On dit qu'on a affaire à un *nœud impropre* :

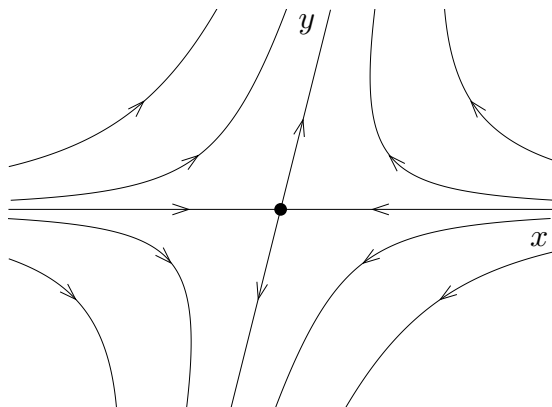


$0 < \lambda_1 < \lambda_2$
nœud impropre instable



$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$
nœud impropre stable

* λ_1, λ_2 de signes opposés, par exemple $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Il s'agit d'un *col* (toujours instable) :

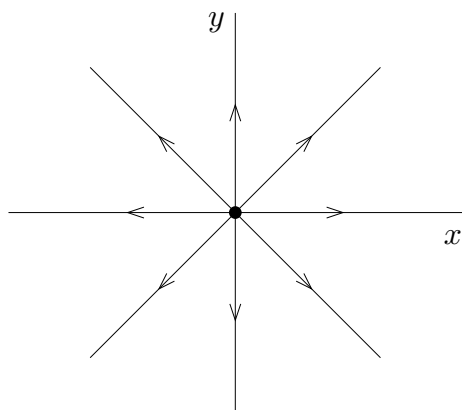


• Les valeurs propres sont confondues : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Deux cas sont possibles :

* A est diagonalisable. Alors A est en fait diagonale et les courbes intégrales sont données par

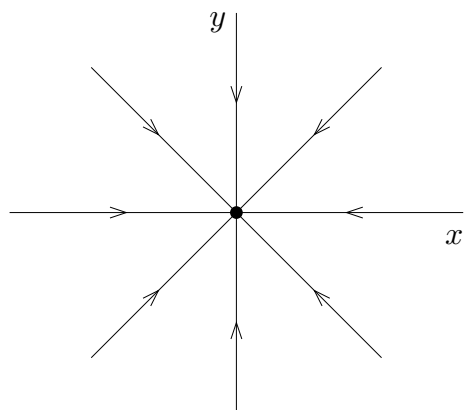
$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{\lambda t} \\ y(t) = y_0 e^{\lambda t}, \end{cases}$$

ce sont les droites $y = \alpha x$ et $x = 0$. On dit qu'on a affaire à un *nœud propre* :



$$\lambda > 0$$

Nœud propre instable



$$\lambda < 0$$

Nœud propre stable

* A est non diagonalisable. Alors il existe une base dans laquelle la matrice A et le système s'écrivent

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda x \\ \frac{dy}{dt} = x + \lambda y. \end{cases}$$

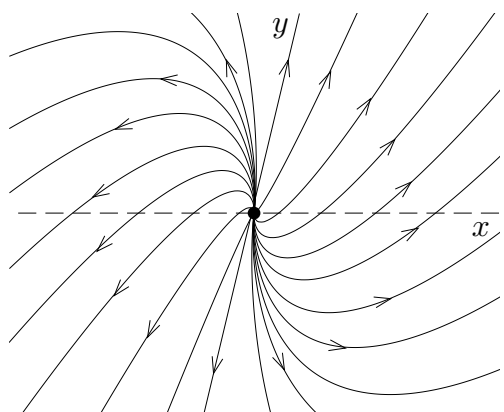
Le courbes intégrales sont données par

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{\lambda t} \\ y(t) = (y_0 + x_0 t) e^{\lambda t}. \end{cases}$$

Comme toute courbe intégrale avec $x_0 \neq 0$ passe par un point tel que $|x(t)| = 1$, on obtient toutes les courbes intégrales autres que $x = 0$ en prenant $x_0 = \pm 1$, d'où

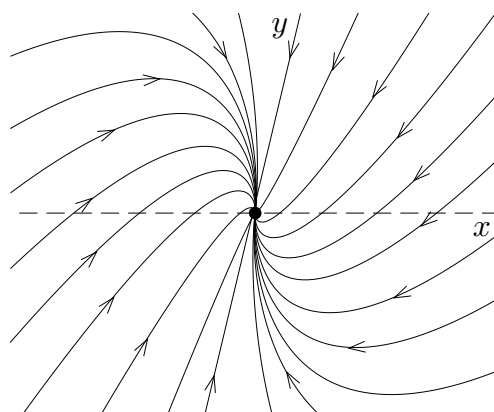
$$\begin{cases} t = \frac{1}{\lambda} \ln |x| \\ y = y_0|x| + \frac{x}{\lambda} \ln |x| \end{cases}$$

On dit qu'il s'agit d'un *nœud exceptionnel*. Pour construire les courbes, on tracera par exemple d'abord la courbe $y = \frac{x}{\lambda} \ln |x|$ passant par $(x_0, y_0) = (\pm 1, 0)$. Toutes les autres s'en déduisent par homothéties.



$$\lambda > 0$$

Nœud exceptionnel instable



$$\lambda < 0$$

Nœud exceptionnel stable

(b) Les valeurs propres de A sont non réelles.

On a des valeurs propres complexes conjuguées $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ avec disons $\beta > 0$, et il existe une base dans laquelle la matrice A et le système s'écrivent

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta y \\ \frac{dy}{dt} = \beta x + \alpha y. \end{cases}$$

La manière la plus rapide de résoudre un tel système est de poser $z = x + iy$. On trouve alors

$$\frac{dz}{dt} = (\alpha + i\beta)x + (-\beta + \alpha i)y = (\alpha + i\beta)(x + iy) = (\alpha + i\beta)z,$$

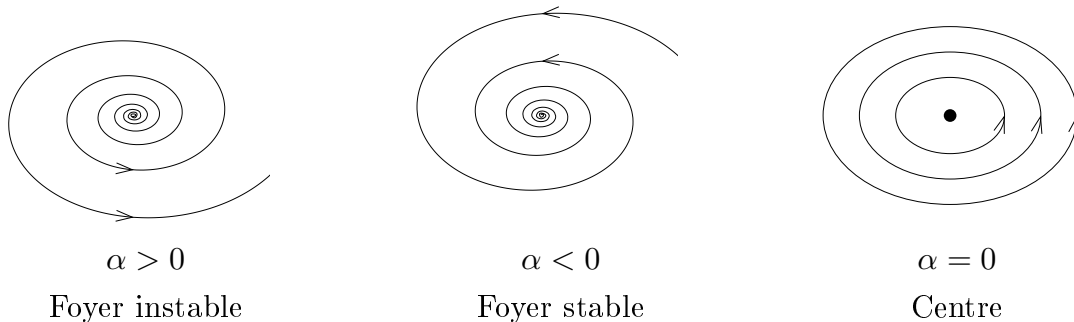
de sorte que la solution générale est

$$z(t) = z_0 e^{(\alpha + i\beta)t} = z_0 e^{\alpha t} e^{i\beta t}.$$

En coordonnées polaires $z = r e^{i\theta}$, l'équation devient

$$\begin{cases} r = r_0 e^{\alpha t} \\ \theta = \theta_0 + \beta t \end{cases}, \quad \text{soit} \quad r = r_0 e^{\frac{\alpha}{\beta}(\theta - \theta_0)}.$$

Il s'agit d'une spirale logarithmique si $\alpha \neq 0$ et d'un cercle si $\alpha = 0$ (noter que ce cercle donne en général graphiquement une ellipse car la base utilisée ci-dessus n'est pas nécessairement orthonormée). On dit alors que le point singulier est un *foyer*, respectivement un *centre* :



Si $\alpha \neq 0$, le rapport d'homothétie de deux spires consécutives de la spirale est $e^{2\pi\alpha/\beta}$.

Comme on le voit, la description de la situation en dimension 2 est toujours très simple. C'est là un fait général, qui résulte du théorème dit de Poincaré-Bendixson :

Théorème de Poincaré-Bendixson. *Soit $M \mapsto \vec{V}(M)$ un champ de vecteurs de classe C^1 dans un ouvert Ω du plan. On suppose qu'il existe une partie fermée bornée $K \subset \Omega$ ne contenant aucun zéro du champ de vecteurs \vec{V} et stable par l'équation d'évolution en temps $t \geq 0$ [hypothèse qui implique en particulier que les courbes intégrales sont définies pour tout point initial $(x_0, y_0) \in K$ et tout $t \geq 0$]. Alors K est constitué d'une réunion d'orbites périodiques du flot.*

Bibliographie mathématique élémentaire :

Jean-Pierre demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, Presses universitaires de Grenoble, 3^e édition, 2006, ISBN 2-7061-0715-4.

Le système différentiel de Lorenz (1963)

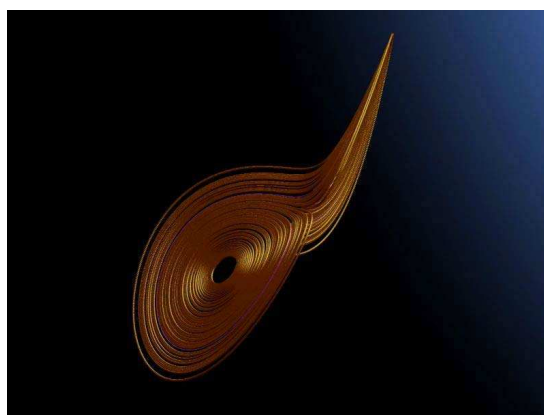
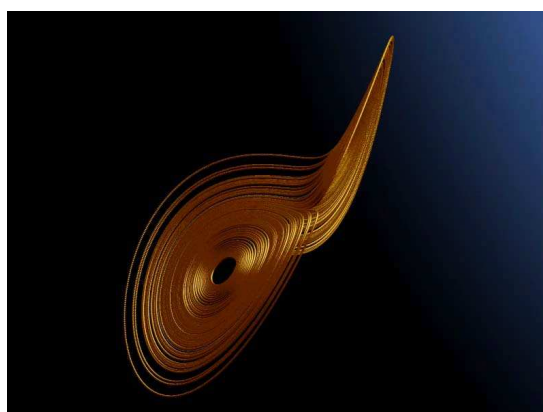
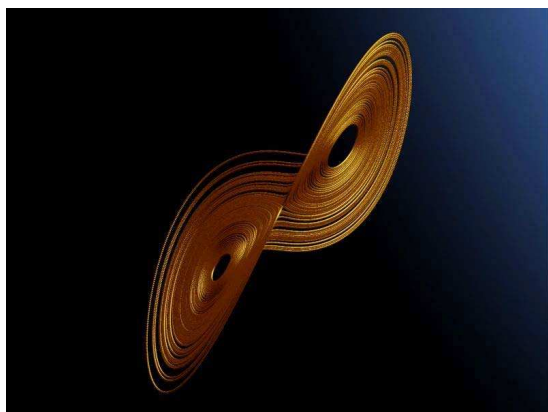
Contrairement à ce qui se passe en dimension 2, les systèmes différentiels d'évolution peuvent dès la dimension 3 donner lieu à des situations géométriques très compliquées et à des comportements essentiellement « chaotiques ».

Nous allons illustrer ceci par un système différentiel célèbre, appelé *système de Lorenz*.

Il s'agit dans l'espace $\Omega = \mathbb{R}^3$ du système différentiel non linéaire

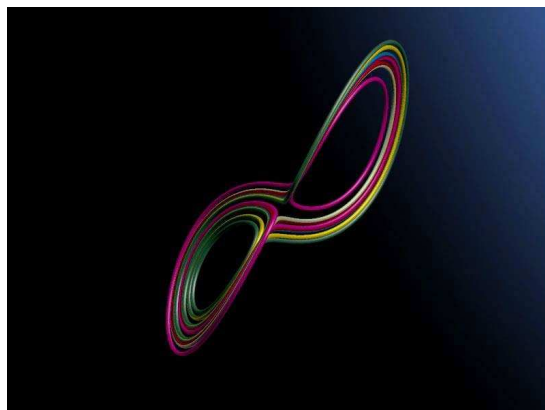
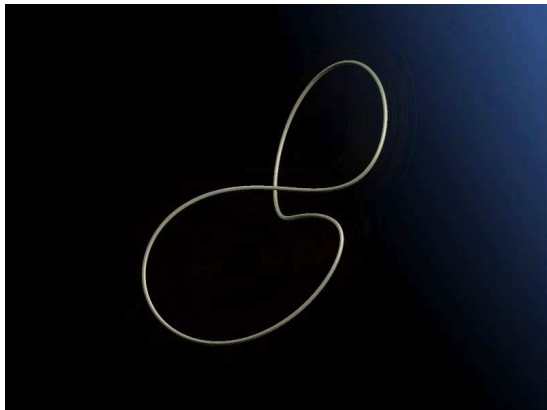
$$(S) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 10(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = 28x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = xy - \frac{8}{3}z. \end{cases}$$

Voici quelques représentations graphiques des trajectoires (nous avons extrait les images de l'exposé d'Étienne Ghys au Congrès International des mathématiciens de Madrid (2006)) : on obtient ce qu'on appelle l'attracteur de Lorenz, qui a une structure fractale.

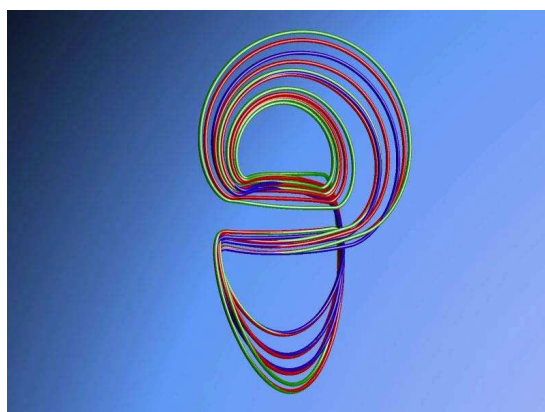
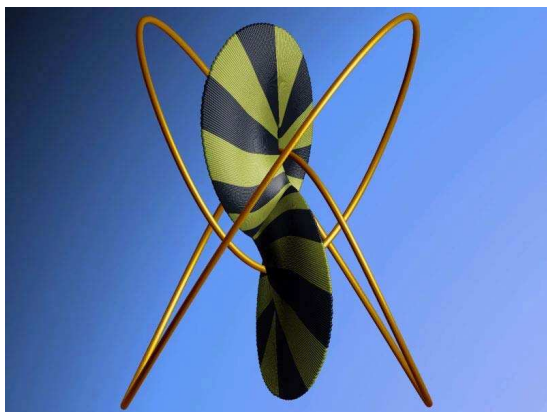


La complexité de ces trajectoires est très grande. En particulier, les trajectoires périodiques forment des nœuds, et il apparaît des nœuds de différents types.

Voici quelques illustrations de nœuds apparaissant au sein des trajectoires :



Un problème particulièrement intéressant étudié par Ghys est de classer tous les types de nœuds pouvant apparaître dans l'attracteur de Lorenz, et ensuite, de déterminer la façon dont ils peuvent s'enlacer :



Il est surprenant de constater que du chaos émerge tout de même certaines formes d'ordre extrêmement complexes, correspondant à des situations mathématiques très riches ...

Références.

Étienne Ghys, <http://www.umpa.ens-lyon.fr/~ghys/>

et en particulier, sur

<http://www.umpa.ens-lyon.fr/~ghys/Publis.html>

l'exposé *Knots and Dynamics*, Proceedings du Congrès International de Madrid 2006,

<http://www.umpa.ens-lyon.fr/~ghys/articles/icm.pdf>

<http://www.umpa.ens-lyon.fr/~ghys/articles/ghys-icm.pdf>