Bull. Sc. math., 2e série,
103, 1979, p. 179-191.

FONCTIONS HOLOMORPHES A CROISSANCE POLYNOMIALE SUR LA SURFACE D'ÉQUATION $e^x + e^y = 1$

PAR

JEAN-PIERRE DEMAILLY (*)

[École normale supérieure, Paris,
et C.N.R.S., L.A. Analyse complexe et Géométrie]

RÉSUMÉ. — Dans cet article, nous démontrons un théorème d'extension très précis pour les fonctions holomorphes sur la surface S de $\mathbf{C}^2$ d'équation $e^x + e^y = 1$. Nous en déduisons que les fonctions à croissance polynomiale sur S sont des restrictions de polynômes sur $\mathbf{C}^2$ et que les fonctions méromorphes à fibres finies sont constantes. En particulier, les fonctions holomorphes bornées sur S sont constantes.

ABSTRACT. — Holomorphic functions with polynomial growth on the curve defined by $e^x + e^y = 1$.

In this paper, we prove a very precise extension theorem for holomorphic functions on the curve S defined by $e^x + e^y = 1$ in $\mathbf{C}^2$. Then we show that holomorphic functions with polynomial growth on S are restrictions of polynomials on $\mathbf{C}^2$, and that meromorphic functions with finite fibres are constant. Especially, we prove that holomorphic bounded functions on S are constant.

Introduction

Dans un article récent [2], L. A. RUBEL, W. A. SQUIRES et B. A. TAYLOR ont démontré que si $f_1, f_2, \ldots, f_n$, $n \geqslant 3$, sont des fonctions méromorphes non constantes dans le plan, l'hypersurface S de $\mathbf{C}^n$ d'équation

$$f_1(z_1) + \ldots + f_n(z_n) = 0$$

est irréductible.

Un problème naturel, soulevé par les auteurs de [2], est de savoir si S est de Liouville, c'est-à-dire si toute fonction holomorphe bornée sur S est constante.

(*) Texte présenté par P. MALLIAVIN, reçu le 4 octobre 1978.

Jean-Pierre DEMAILLY, École normale supérieure, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05.

La réponse est positive, comme on le voit facilement, lorsque l'une des f_i est rationnelle.

Dans ce travail, nous montrons que la réponse est encore positive pour la surface régulière S d'équation $e^x+e^y = 1$ (qui est connexe en tant que surface de Riemann de la fonction $y = \operatorname{Log}(1-e^x)$), et plus précisément qu'une fonction à croissance polynomiale sur S est la restriction d'un polynôme de deux variables de degré correspondant.

La démonstration consiste, dans un premier temps, à étendre les fonctions de S en des fonctions entières, dont on contrôle la croissance grâce aux techniques d'HÖRMANDER [1]. Dans un deuxième temps, on utilise le fait que S est « voisine » de la surface $e^x+e^y = 0$, qui est réunion de droites complexes; le théorème de Liouville permet d'exploiter les propriétés de croissance précédemment établies, et de montrer qu'une fonction f sur S à croissance polynomiale est la restriction à S d'un polynôme sur $\mathbf{C}^2$.

Ce résultat entraîne aisément qu'il n'existe pas sur S de fonction méromorphe à fibres finies. On en déduit en particulier que S n'est pas isomorphe à un ouvert d'une courbe algébrique, et plus généralement, que S ne peut s'obtenir à partir de la sphère de Riemann $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ par constructions successives de revêtements ramifiés à fibres finies (*cf.* paragraphe 2).

Je remercie vivement M. Henri SKODA de m'avoir soumis ce sujet de recherches, et d'avoir beaucoup contribué par ses remarques à améliorer la clarté de l'exposé. Après avoir terminé ce travail, nous avons appris récemment que I. WAKABAYASHI (Tokyo Noko University) a également démontré que la surface S est de Liouville, par une méthode complètement différente.

1. Extension des fonctions holomorphes sur S avec contrôle de la croissance

THÉORÈME 1. — *Soit φ une fonction plurisousharmonique dans $\mathbf{C}^2$ telle que*

$$|\varphi(z)-\varphi(z')| < A \quad \text{si} \quad |z-z'| < 1, \quad z, z' \in \mathbf{C}^2. \tag{1}$$

Pour toute fonction holomorphe f sur S vérifiant avec une constante $C > 0$

$$|f(z)| \leqslant C e^{\varphi(z)}, \qquad z \in S,$$

il existe une fonction entière F, égale à f sur S, telle que

$$|F(z)| \leqslant 10^4 C e^{3A}(1+|z|)^5(1+|e^x+e^y|)e^{\varphi(z)},$$

où

$$z = (x, y) \in \mathbf{C}^2, \qquad |z|^2 = |x|^2+|y|^2.$$

Démonstration. — Le principe en est classique, mais la nécessité (pour le paragraphe 2) d'obtenir très précisément le facteur $1+|e^x+e^y|$ dans la majoration du théorème 1 rend la démonstration particulièrement technique. Pour la commodité du lecteur, la démonstration a été découpée en quatre étapes.

Étape 1 : *extension locale de* f.

On désigne par U_1, U_2 les ouverts de $\mathbf{C}^2$:

$$U_1 = \left\{(x, y);\ \operatorname{Re} x < 1 \ \text{ et } \ |e^x+e^y-1| < \frac{1}{2}\right\},$$

$$U_2 = \left\{(x, y);\ \operatorname{Re} x > 0 \ \text{ et } \ |e^x+e^y-1| < \frac{1}{2}|e^x|\right\}$$

$$= \left\{(x, y);\ \operatorname{Re} x > 0 \ \text{ et } \ |e^{-x}-e^{y-x}-1| < \frac{1}{2}\right\}.$$

f se prolonge en une fonction f_j holomorphe sur U_j, $j = 1,2$, de la manière suivante (on appelle Log la détermination du logarithme complexe sur $\mathbf{C}-]-\infty, 0]$ telle que $\operatorname{Log} 1 = 0$) :

$$f_1(x, y) = f(x-\operatorname{Log}(e^x+e^y),\ y-\operatorname{Log}(e^x+e^y)) \qquad \text{pour} \quad (x, y)\in U_1,$$

$$(2) \qquad f_2(x, y) = f(x+\operatorname{Log}(e^{-x}-e^{y-x}),\ y) \qquad \text{pour} \quad (x, y)\in U_2.$$

Il est immédiat que f_1 et f_2 coïncident avec f sur S.

Étape 2 : *construction d'une partition de l'unité.*

Soit χ une fonction de classe C^∞ définie sur $\mathbf{R}$ telle que $0 \leqslant \chi \leqslant 1$,

$$\chi(t) = 1 \qquad \text{pour} \quad t < \frac{1}{4},$$

$$\chi(t) = 0 \qquad \text{pour} \quad t > \frac{1}{3}, \quad \text{et} \quad \left|\frac{d\chi}{dt}\right| \leqslant 13.$$

On pose

$$\psi_1(z) = \chi(\operatorname{Re} x).\chi(|e^x+e^y-1|),$$

$$\psi_2(z) = (1-\chi(\operatorname{Re} x)).\chi(|e^{-x}-e^{y-x}-1|).$$

Les supports de ψ_1, ψ_2 sont respectivement contenus dans U_1 et U_2, et on a

$$0 \leqslant \psi_1(z)+\psi_2(z) \leqslant \chi(\operatorname{Re} x)+1-\chi(\operatorname{Re} x) \leqslant 1.$$

De plus $\psi_1+\psi_2 = 1$ sur le voisinage ouvert

$$V = \left\{(x, y)\in\mathbf{C}^2;\ |e^x+e^y-1| < \frac{1}{4}\right\} \ \text{de } S.$$

Soit en effet $(x, y) \in V$;
si $\operatorname{Re} x < 1/4$, on a

$$\psi_1 = 1, \qquad \psi_2 = 0;$$

si $\operatorname{Re} x > 0$, on a

$$|e^{-x} - e^{y-x} - 1| < \frac{1}{4}|e^{-x}| < \frac{1}{4},$$

d'où

$$\psi_1 = \chi(\operatorname{Re} x), \qquad \psi_2 = 1 - \chi(\operatorname{Re} x).$$

On remarque également que ψ_1, ψ_2 sont de classe C^∞, et que les différentielles $d\psi_1$, $d\psi_2$ sont bornées.

Pour montrer ce dernier point, on utilise les majorations

$$|e^x| < e, \qquad |e^y| < \frac{3}{2} + e \quad \text{sur } U_1,$$

$$|e^{-x}| < 1, \qquad |e^{y-x}| < \frac{5}{2} \quad \text{sur } U_2.$$

On a

$$d\psi_1 = \chi'(\operatorname{Re} x)\, d(\operatorname{Re} x) . \chi(|e^x + e^y - 1|)$$
$$+ \chi(\operatorname{Re} x)\chi'(|e^x + e^y - 1|)\, d|e^x + e^y - 1|,$$

avec

$$d|e^x + e^y - 1| = \operatorname{Re}\left(\frac{|e^x + e^y - 1|}{e^x + e^y - 1}(e^x\, dx + e^y\, dy)\right),$$

donc

$$|d\psi_1| \leqslant |\chi'(\operatorname{Re} x)| + |\chi'(|e^x + e^y - 1|)|(|e^x|^2 + |e^y|^2)^{1/2},$$

en normes euclidiennes usuelles pour les formes.

On a ainsi

$$|d\psi_1| \leqslant 13\left(1 + \sqrt{e^2 + \left(\frac{3}{2} + e\right)^2}\right) \leqslant 70,$$

et on montrerait de même $|d\psi_2| \leqslant 70$.

A fortiori on a

$$(3) \qquad |\bar\partial\psi_1| \leqslant 70, \qquad |\bar\partial\psi_2| \leqslant 70.$$

Étape 3 : *recherche de F et majorations.*

Cherchons la fonction entière F sous la forme

$$F = f_1\psi_1 + f_2\psi_2 - (e^x + e^y - 1)u,$$

avec $u \in C^\infty(\mathbf{C}^2)$.

F coïncide par construction avec f sur S, et la condition d'holomorphie $\bar{\partial} F = 0$ équivaut à $\bar{\partial} u = h$, où h est la forme de bidegré (0, 1) :

$$h = \frac{f_1 \bar{\partial}\psi_1 + f_2 \bar{\partial}\psi_2}{e^x + e^y - 1}. \tag{4}$$

h est de classe C^∞ en dehors de S, et sur le voisinage V de S, on a $\bar{\partial}\psi_1 + \bar{\partial}\psi_2 = 0$, d'où

$$h = \frac{f_1 - f_2}{e^x + e^y - 1} \bar{\partial}\psi_2 = \frac{f_2 - f_1}{e^x + e^y - 1} \bar{\partial}\psi_2, \tag{5}$$

avec $f_2 - f_1 = 0$ sur $S \cap U_1 \cap U_2$, par suite h est de classe C^∞ sur $\mathbf{C}^2$ tout entier.

D'après (1) et (2), on a

$$|f_j(z)| \leqslant C e^A e^{\varphi(z)} \quad \text{sur } U_j,$$

compte tenu de ce que

$$\sqrt{2}\,|\operatorname{Log}(e^x + e^y)| \leqslant \sqrt{2}\operatorname{Log} 2 < 1 \quad \text{sur } U_1,$$

et

$$|\operatorname{Log}(e^{-x} - e^{y-x})| \leqslant \operatorname{Log} 2 < 1 \quad \text{sur } U_2.$$

Il en résultera une majoration du type $|h| \leqslant C_1 e^{\varphi(z)}$, où C_1 est une constante à déterminer.

En dehors de V on a $|e^x + e^y - 1| \geqslant 1/4$, et d'après (3), (4) il vient sur $\complement V$:

$$|h| \leqslant 4.70(|f_1| + |f_2|) \leqslant 560\, C e^A e^{\varphi(z)}. \tag{6}$$

Pour $z \in V$, on peut supposer $z \in \operatorname{supp}\psi_1 \cap \operatorname{supp}\psi_2$, donc $1/4 \leqslant \operatorname{Re} x \leqslant 1/3$, sinon $h(z) = 0$ d'après (5).

x étant fixé tel que $1/4 \leqslant \operatorname{Re} x \leqslant 1/3$, la fonction

$$\frac{f_2 - f_1}{e^x + e^y - 1}$$

est holomorphe en y pour

$$|e^x + e^y - 1| < \frac{1}{2}.$$

Pour

$$\rho \leqslant |e^x + e^y - 1| < \frac{1}{2},$$

on a

$$\frac{f_2 - f_1}{e^x + e^y - 1} \leqslant \frac{2C}{\rho} e^A e^{\varphi(z)}. \tag{7}$$

L'ensemble

$$\{y\in \mathbf{C};\ |e^x+e^y-1|\leqslant \rho\},\qquad \text{pour}\quad \rho<|1-e^x|,$$

est une réunion de translatées modulo $2i\pi\mathbf{Z}$ de la partie compacte

$$K_x=\{y\in\mathbf{C};\ |e^x+e^y-1|\leqslant\rho,\ |\operatorname{Im} y-\operatorname{Arg}(1-e^x)|\leqslant\pi\},$$

dont le diamètre est majoré par

$$2\operatorname{Log}\frac{1}{1-\rho/|1-e^x|}$$

$$\left(\text{puisque } y=\operatorname{Log}(1-e^x)+\operatorname{Log}\left(1+\frac{e^x+e^y-1}{1-e^x}\right)\right).$$

Comme

$$|e^x-1|\geqslant e^{1/4}-1>\frac{1}{4}+\frac{1}{32}=\frac{9}{32},$$

le choix $\rho=1/10$ entraîne

$$\operatorname{diam} K_x\leqslant 2\operatorname{Log}\frac{45}{29}<1;$$

le principe du maximum donne alors pour tout y tel que $|e^x+e^y-1|\leqslant\rho$:

$$(8)\qquad \begin{aligned}&\left|\frac{f_2(z)-f_1(z)}{e^x+e^y-1}\right|\\ &\leqslant \sup_{z'=(x,y'),\,|y'-y|<1,\,|e^x+e^{y'}-1|=\rho}\left|\frac{f_2(z')-f_1(z')}{e^x+e^{y'}-1}\right|\\ &\leqslant\frac{2C}{\rho}e^A\sup_{|z'-z|<1}e^{\varphi(z')}\\ &\leqslant 20\,C\,e^{2A}\,e^{\varphi(z)}.\end{aligned}$$

On a donc (*cf.* (3), (5), (6), (7) et (8)) :

$$(9)\qquad |h|\leqslant 1\,400\,C\,e^{2A}\,e^{\varphi(z)}.$$

Étape 4 : *résolution du* $\bar\partial$.

LEMME 1 (HÖRMANDER [1], p. 94, *théorème* 4.4.2, *et régularité du* $\bar\partial$ *en bidegré* (0, 0)). — *Soit* φ *une fonction plurisousharmonique dans un domaine pseudo-convexe* Ω, *et* $h\in C^\infty_{0,1}(\Omega)$ *une forme de bidegré* (0, 1) *telle que*

$$\bar\partial h=0\qquad et\qquad \int_\Omega |h|^2e^{-\varphi}\,d\lambda<\infty.$$

Alors il existe une fonction $u \in C^\infty(\Omega)$ telle que $\bar\partial u = h$, et

$$\int_\Omega |u|^2 e^{-\varphi}(1+|z|^2)^{-2}\,d\lambda \leqslant \frac{1}{2}\int_\Omega |h|^2 e^{-\varphi}\,d\lambda.$$

(λ *désignant la mesure de Lebesgue*).

Appliquons le lemme 1 à notre situation, avec $\Omega = \mathbf{C}^2$, et où $2\varphi + 3\,\mathrm{Log}(1+|z|^2)$ remplace φ.

D'après (9) on a

$$\int_{\mathbf{C}^2} |h|^2 e^{-2\varphi}(1+|z|^2)^{-3}\,d\lambda \leqslant \frac{(1\,400\,C\,e^{2A})^2}{2}\int_{\mathbf{C}^2}\frac{d\lambda}{(1+|z|^2)^3}.$$

On vérifie aisément que

$$\int_{\mathbf{C}^2}\frac{d\lambda}{(1+|z|^2)^3} = \int_{|z|<1} d\lambda = \frac{\pi^2}{2}.$$

On obtient par le lemme 1 une fonction u de classe C^∞ telle que $\bar\partial u = h$ et

$$(10)\qquad \frac{2}{\pi^2}\int_{\mathbf{C}^2} |u|^2 e^{-2\varphi}(1+|z|^2)^{-5}\,d\lambda \leqslant (700\sqrt{2}\,C\,e^{2A})^2.$$

En appliquant la formule de Cauchy (HÖRMANDER [1], p. 3, théorème 1.2.1) à la fonction

$$v(\zeta) = u(z+\zeta w), \qquad z\in\mathbf{C}^2,\quad w\in\mathbf{C}^2,\quad \zeta\in\mathbf{C},$$

il vient

$$v(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_{|\zeta|=1}\frac{v(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta - \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|\leqslant 1}\frac{\partial v}{\partial\bar\zeta}\,\frac{d\lambda(\zeta)}{\zeta},$$

soit

$$u(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{|\zeta|=1}\frac{u(z+\zeta w)}{\zeta}\,d\zeta - \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|\leqslant 1}\frac{\bar\partial u(z+\zeta w).w}{\zeta}\,d\lambda(\zeta).$$

Prenons la valeur moyenne (en abrégé *VM*) en la variable w des deux membres sur la boule $|w| < 1$:

$$u(z) = VM_{|w|<1}\,u(z+w) - 2\int_0^1 dr\,VM_{|w|<1}\,\bar\partial u(z+rw).w,$$

d'où

$$(11)\quad |u(z)| \leqslant VM_{|w-z|<1}|u(w)| + 2\sup_{|w-z|<1}|\bar\partial u(w)|.VM_{|w|<1}|w|$$

$$\leqslant (VM_{|w-z|<1}|u(w)|^2)^{1/2} + \frac{8}{5}\sup_{|w-z|<1}|\bar\partial u(w)|,$$

grâce à l'inégalité de Schwarz.

(1) et (10) entraînent

$$(VM_{|w-z|<1}|u(w)|^2)^{1/2} \leqslant 700\sqrt{2}\,C\,e^{2A}\,e^{\varphi(z)+A}(1+(1+|z|^2)^{5/2}$$
$$\leqslant 5\,600\,C\,e^{3A}(1+|z|)^5\,e^{\varphi(z)}.$$

L'inégalité (11) jointe à (9) montre que

$$|u(z)| \leqslant 8\,000\,C\,e^{3A}(1+|z|)^5\,e^{\varphi(z)},$$

et en revenant à la définition de F, on voit que

$$|F(z)| \leqslant C\,e^A\,e^{\varphi(z)}+8\,000\,C\,e^{3A}(1+|z|)^5\,|e^x+e^y-1|\,e^{\varphi(z)}$$
$$\leqslant 10^4\,C\,e^{3A}(1+|z|)^5(1+|e^x+e^y|)\,e^{\varphi(z)},$$

qui était précisément l'inégalité à démontrer.

2. Fonctions holomorphes à croissance polynomiale sur S

THÉORÈME 2. — *Soit f une fonction holomorphe sur S telle que*

$$|f(z)| \leqslant C(1+|z|)^n, \qquad z=(x, y)\in S,$$

n étant un nombre réel $\geqslant 0$. Alors f est la restriction à S d'un polynôme $P(x, y)$ de degré total $\leqslant n$.

Démonstration. — Le théorème 1 appliqué avec

$$\varphi(z)=n\,\mathrm{Log}(1+|z|), \qquad A=n\,\mathrm{Log}\,2,$$

montre qu'il existe une fonction entière F prolongeant f telle que

$$|F(z)| \leqslant 10^4.8^n\,C(1+|z|)^{n+5}(1+|e^x+e^y|).$$

Le théorème 2 résultera alors du lemme suivant.

LEMME 2. — *Soit F une fonction entière telle que*

$$|F(z)| \leqslant C(1+|z|)^n(1+|e^x+e^y|), \tag{12}$$

pour tout $z=(x, y)\in \mathbf{C}^2$, où $n \geqslant 0$.

Il existe deux polynômes $G(x, y)$, $H(x, y)$ de degrés totaux $\leqslant n$ tels que $F(x, y)=G(x, y)+(e^x+e^y)\,H(x, y)$.

Démonstration du lemme 2. — Le développement en série entière de F par rapport aux variables x, $y-x$, peut s'écrire :

$$F(x, y)=\textstyle\sum_{j\geqslant 0} x^j\,g_j(y-x),$$

où les g_j sont des fonctions entières.

On a

$$g_j(y) = \frac{1}{2i\pi}\int_{|x|=1} \frac{F(x, y+x)}{x^{j+1}}dx,$$

et

(13) $$|g_j(y)| \leqslant C_1(1+|y|)^n(1+|e^y|).$$

On remarque que la surface d'équation $e^x+e^y = 0$ est la réunion des droites complexes $y-x = (2k+1)i\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, et la démonstration utilisera ce fait de manière essentielle.

Sur la surface $e^x+e^y = 0$, on a d'après (12) : $|F(z)| \leqslant C(1+|z|)^n$.

La restriction de F à chaque droite $y-x = (2k+1)i\pi$ est donc un polynôme de degré $\leqslant n$, i. e.

$$g_j((2k+1)i\pi) = 0 \qquad \text{pour} \quad j > n, \quad k \in \mathbf{Z},$$

et $g_j(y)$ est divisible par e^y+1 pour $j > n$; on pose $g_j(y) = (e^y+1)p_j(y)$.

Pour $|e^y+1| \geqslant 1/2$, (13) implique $p_j(y) \leqslant C_2(1+|y|)^n$ (distinguer les cas $\mathrm{Re}\, y \leqslant 1$, $\mathrm{Re}\, y \geqslant 1$).

Comme l'ensemble défini par $|e^y+1| \leqslant 1/2$ est une réunion de compacts disjoints qui se déduisent les uns des autres par translations modulo $2i\pi\mathbf{Z}$, la majoration $|p_j(y)| \leqslant C_2(1+|y|)^n$ s'étend à tout le plan complexe grâce au principe du maximum.

p_j est donc un polynôme de degré $\leqslant n$, et on a

$$F(x, y) = \textstyle\sum_{0 \leqslant j \leqslant n} x^j g_j(y-x) + (e^{y-x}+1)\sum_{j>n} x^j p_j(y-x),$$

où les deux sommes sont des fonctions entières.

Cette égalité peut se récrire :

(14) $$F(x, y) = \textstyle\sum_{0 \leqslant j \leqslant n} x^j g_j(y-x) + (e^x+e^y)\sum_{0 \leqslant j \leqslant n}(y-x)^j h_j(x),$$

$(\widehat{14})$ $$= \textstyle\sum_{0 \leqslant j \leqslant n} y^j \hat{g}_j(y-x) + (e^x+e^y)\sum_{0 \leqslant j \leqslant n}(y-x)^j \hat{h}_j(y),$$

compte tenu de la symétrie des rôles de x et y; g_j, $\hat{g}_j$, h_j, $\hat{h}_j$ désignent ici des fonctions entières.

Il vient

(15) $$(e^x+e^y)\textstyle\sum_{0 \leqslant j \leqslant n}(y-x)^j[h_j(x)-\hat{h}_j(y)] = \sum_{0 \leqslant j \leqslant n} y^j \hat{g}_j(y-x) - \sum_{0 \leqslant j \leqslant n} x^j g_j(y-x).$$

Effectuons dans (15) le changement de variable $y = x+t$, où t sera considéré comme un paramètre; à ce stade le raisonnement est purement formel. On obtient :

$$(1+e^t)e^x \textstyle\sum_{0 \leqslant j \leqslant n} t^j [h_j(x) - \hat{h}_j(x+t)] = Q(t, x),$$

où Q est une fonction entière, polynomiale de degré $\leqslant n$ en x, et chaque coefficient est divisible par $1+e^t$.

Par conséquent

$$\sum_{0\leqslant j\leqslant n} t^j\left[h_j(x)-\hat{h}_j(x+t)\right] = R(t, x)\, e^{-x}, \tag{16}$$

où R est entière, polynomiale de degré $\leqslant n$ en x.

Montrons par récurrence sur les valeurs décroissantes de j que l'on a

$$\begin{cases} h_j(x) = q_j(x)\, e^{-x}+q'_j(x), \\ \hat{h}_j(x) = \hat{q}_j(x)\, e^{-x}+\hat{q}'_j(x), \end{cases} \tag{17}$$

où q_j, q'_j, $\hat{q}_j$, $\hat{q}'_j$ sont des polynômes, et $\deg q_j$, $\deg \hat{q}_j \leqslant \nu$,

$$\deg q'_j,\ \deg \hat{q}'_j \leqslant \frac{\nu(\nu+3)-j(j+1)}{2},$$

ν désignant la partie entière de n.

Si le résultat est vrai pour $j+1$, $j+2$, ..., ν, on tire de (16) l'égalité

$$\sum_{k=0}^{j} t^k\left[h_k(x)-\hat{h}_k(x+t)\right] = R_j(t, x)\, e^{-x}+R'_j(t, x), \tag{18}$$

avec des fonctions entières R_j, R'_j polynomiales en x,

$$\deg_x R_j \leqslant \nu, \qquad \deg_x R'_j \leqslant \frac{\nu(\nu+3)-(j+1)(j+2)}{2};$$

pour $j = \nu$, (18) se réduit à (16).

Dérivons l'identité (18) $j+1$ fois par rapport à t; on trouve

$$\begin{aligned} &-t^j\, \hat{h}_j^{(j+1)}(x+t) \\ &+\text{somme de termes } t^k\, \hat{h}_l^{(s)}(x+t), \qquad k<j \\ &= \frac{\partial^{j+1} R_j}{\partial t^{j+1}}(t, x)\, e^{-x}+\frac{\partial^{j+1} R'_j}{\partial t^{j+1}}(t, x). \end{aligned}$$

Substituons y à $x+t$, et identifions les coefficients de t^j dans chaque membre

$$\hat{h}_j^{(j+1)}(y) = \tilde{q}_j(y)\, e^{-x}+\tilde{q}'_j(y)$$

avec

$$\deg \tilde{q}_j \leqslant \nu, \qquad \deg \tilde{q}'_j \leqslant \frac{\nu(\nu+3)-(j+1)(j+2)}{2}.$$

L'égalité annoncée pour $\hat{h}_j$ s'en déduit, et l'identité

$$\sum_{k=0}^{j} t^k(h_j(y-t)-\hat{h}_j(y)) = R_j(t, y-t)\, e^{-x}+R'_j(t, y-t)$$

donne de même

$$h_j(x) = q_j(x)\, e^{-x}+q'_j(x).$$

On reporte (17) dans l'expression (14) de F pour obtenir

$$(19) \quad F(x, y) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant \nu} x^j g_j(y-x) + (1+e^{y-x}) \sum_{0 \leqslant j \leqslant \nu} (y-x)^j q_j(x)$$
$$+ (e^x + e^y) \sum_{0 \leqslant j \leqslant \nu} (y-x)^j q'_j(x)$$
$$= \sum_{0 \leqslant j \leqslant \nu} x^j f_j(y-x) + (e^x+e^y) H(x, y),$$

où

$$f_j(y) = g_j(y) + (1+e^y) \sum_{0 \leqslant j \leqslant \nu} \frac{y^k}{j!} \frac{d^j q_k}{dx^j}(0),$$

et

$$H(x, y) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant \nu} (y-x)^j q'_j(x),$$

H polynôme de degré total

avec
$$\leqslant \sup_{0 \leqslant j \leqslant \nu} \frac{\nu(\nu+3) - j(j-1)}{2} = \frac{\nu(\nu+3)}{2} \leqslant \mu,$$

$$\mu = \frac{n(\nu+3)}{2} \geqslant n.$$

D'après la majoration (12), et (19), on a

$$\left| \sum_{0 \leqslant j \leqslant \nu} x^j f_j(y-x) \right| \leqslant C_3 (1+|z|)^\mu (1+|e^x+e^y|),$$
$$\left| \sum_{0 \leqslant j \leqslant \nu} x^j f_j(y) \right| \leqslant C_4 (1+|z|)^\mu (1+|e^x|(1+|e^y|)).$$

Utilisons cette inégalité aux points x, $x+1$, ..., $x+\nu$, et résolvons le système linéaire ainsi obtenu.

Le déterminant du système est du type Vandermonde, donc son module est $\geqslant 1$, la distance des points x, $x+1$, ..., $x+\nu$, deux à deux étant elle-même $\geqslant 1$.

De plus les déterminants

$$\begin{vmatrix} 1 & x & \dots & x^\nu \\ 1 & x+1 & & (x+1)^\nu \\ \vdots & & & \\ 1 & x+\nu & & (x+\nu)^\nu \end{vmatrix}$$

où l'une des colonnes est remplacée par une colonne de données, sont majorés par

$$C_5 (1+|x|)^{\nu(\nu+1)/2} . \sup |\text{données}|.$$

On a donc

$$|f_j(y)| \leqslant C_6 (1+|z|)^{\mu + [\nu(\nu+1)/2]} (1+|e^x|(1+|e^y|));$$

si $\operatorname{Re} y \leqslant 0$, choisissons $x = 0$, et si $\operatorname{Re} y \geqslant 0$ choisissons $x = -y$; il vient

$$|f_j(y)| \leqslant C_7 (1+|y|)^{n(\nu+2)}$$

et f_j est un polynôme de degré $\leqslant n(\nu+2)$.

L'égalité (19) s'écrit maintenant :

$$F(x, y) = G(x, y) + (e^x + e^y) H(x, y),$$

où G et H sont deux polynômes,

$$\deg G \leqslant n(\nu+2) + \nu \leqslant n(n+3),$$

$$\deg H \leqslant \frac{\nu(\nu+3)}{2} \leqslant \frac{n(n+3)}{2}.$$

Montrons qu'en fait $\deg G \leqslant n$, $\deg H \leqslant n$.

Sur la surface S_a d'équation $e^x + e^y = a$, F coïncide avec le polynôme $P = G + a H$.

Il suffit de prouver que pour tout $a \in \mathbf{C}$, $\deg P \leqslant n$. Sinon, soient $m = \deg P > n$, P_m la partie homogène de degré m de P, et (x_0, y_0) un point fixé de S_a. Pour tous les entiers j et k, le point $(x_0 + 2\, ij\, \pi, y_0 + 2\, ik\, \pi)$ appartient à S_a, et d'après (12) on a

$$| P(x_0 + 2\, ij\, \pi, y_0 + 2\, ik\, \pi) | \leqslant C_8 (1 + |j| + |k|)^n.$$

Prenons $j = [t\,\zeta]$, $k = [t\,\eta]$, où t, ζ, $\eta \in \mathbf{R}$, et où $[\ \ ]$ désigne la partie entière.

$$\frac{P(x_0 + 2\, ij\, \pi, y_0 + 2\, ik\, \pi)}{(2\, i\, \pi\, t)^m}$$

tend vers $P_m(\zeta, \eta)$ quand $|t|$ tend vers $+\infty$, tandis que

$$\frac{C_8 (1 + |j| + |k|)^n}{|2\, i\, \pi\, t|^m}$$

tend vers zéro, puisque $m > n$.

On a donc $P_m(\zeta, \eta) = 0$ pour tous ζ, $\eta \in \mathbf{R}$, et $P_m = 0$ contrairement à l'hypothèse.

La démonstration du lemme 2 est achevée, et avec elle, celle du théorème 2 (l'assertion $\deg P \leqslant n$ s'obtient en raisonnant sur S comme ci-dessus).

En particulier, S est de Liouville, ce qui signifie par définition que les fonctions holomorphes bornées sur S sont constantes. Signalons qu'étant donné une variété de Liouville X, il est possible de construire des variétés de même nature par les procédés suivants :

(*a*) ôter de X une partie fermée « suffisamment petite » (par exemple une partie fermée polaire);

(*b*) construire au-dessus de X un revêtement connexe (ramifié ou non) à fibres finies. Ainsi, de même que $\mathbf{C}^n$, les variétés algébriques irréductibles de dimension n sont de Liouville.

Le corollaire ci-dessous montre que la surface S ne peut se déduire de la sphère $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ par application répétée des procédés (*a*) et (*b*).

COROLLAIRE. — *Soit* $f : S \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ *une fonction méromorphe sur* S. *On suppose qu'il existe un ouvert non vide* U *de* $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ *tel que pour tout* $a \in U$ *la fibre* $f^{-1}(a)$ *soit finie. Alors* f *est constante.*

Démonstration. — Comme la fonction $U \to \mathbf{N}$, $a \mapsto \operatorname{Card} f^{-1}(a)$ est semi-continue inférieurement, le théorème de Baire montre qu'il existe un ouvert non vide $V \subset U$ et un entier p, tels que pour tout $a \in V$, $\operatorname{Card} f^{-1}(a) \leqslant p$. Choisissons $a_0 \in V$ tel que $p = \operatorname{Card} f^{-1}(a_0)$ soit maximal, et notons

$$f^{-1}(a_0) = \{z_1, z_2, \ldots, z_p\}.$$

Il existe des voisinages $W \subset V$ de a_0 dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, et $W_1, \ldots, W_p$ de $z_1, \ldots, z_p$, disjoints, relativement compacts dans S, tels que f applique isomorphiquement $W_1, \ldots, W_p$ sur W (sinon $\operatorname{Card} f^{-1}(a_0)$ ne serait pas maximal).

Si $a_0 = \infty$ posons $g = f$, sinon posons

$$g = \frac{1}{f - a_0};$$

on a $f^{-1}(W) = W_1 \cup \ldots \cup W_p$, par suite g est bornée en dehors de $W_1, \ldots, W_p$, et possède des pôles simples aux points

$$z_1 = (x_1, y_1), \ldots, z_p = (x_p, y_p)$$

de S.

La fonction $P(x, y) = g(x, y) \prod_{1 \leqslant j \leqslant p} (x - x_j)$ est holomorphe sur S, à croissance polynomiale de degré p; donc P est la restriction à S d'un polynôme de degré total $\leqslant p$, de même que la fonction

$$Q(x, y) = g(x, y) \prod_{1 \leqslant j \leqslant p} (y - y_j).$$

On a sur S,

$$P \cdot \prod_{1 \leqslant j \leqslant p} (y - y_j) = Q \cdot \prod_{1 \leqslant j \leqslant p} (x - x_j),$$

et cette égalité est vraie formellement (*cf.* démonstration du lemme 2; S n'est pas algébrique).

Par conséquent $\prod_{1 \leqslant j \leqslant p} (x - x_j)$ divise P, g est holomorphe bornée sur S, et $p = 0$.

Il en résulte que g et f sont constantes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HÖRMANDER (L.). — *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, North Holland Publishing Company, 1973.

[2] RUBEL (L. A.), SQUIRES (W. A.) et TAYLOR (B. A.). — *Irreducibility of certain entire functions with applications to harmonic analysis* (preprint).

ADDENDUM (tiré de la Thèse de 3e Cycle)

COROLLAIRE (analogue pour S du théorème de Picard dans le plan). - Soit f une fonction méromorphe non constante sur S, considérée comme application de S dans $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$. Alors l'ensemble des points $a \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ tels que la fibre $f^{-1}(a)$ soit finie est maigre.

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout entier p l'ensemble fermé $\{a \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Card}\, f^{-1}(a) \leqslant p\}$ est d'intérieur vide.
Supposons au contraire qu'il existe un ouvert U non vide de $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ tel que pour tout $a \in U$ on ait $\mathrm{Card}\, f^{-1}(a) \leqslant p$. Choisissons $a_o \in U$ tel que $p = \mathrm{Card}\, f^{-1}(a_o)$ soit maximal, et notons $f^{-1}(a_o) = \{z_1, z_2, \dots, z_p\}$.
Il existe des voisinages $V \subset U$ de a_o dans $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$, et $V_1, \dots, V_p$ de $z_1, \dots, z_p$, disjoints, relativement compacts dans S, tels que f applique isomorphiquement $V_1, \dots, V_p$ sur V (sinon $\mathrm{Card}\, f^{-1}(a_o)$ ne serait pas maximal).
Si $a_o = \infty$ posons $g = f$, sinon posons $g = \dfrac{1}{f - a_o}$; on a $f^{-1}(V) = V_1 \cup \dots \cup V_p$, par suite g est bornée en dehors de $V_1, \dots, V_p$, et possède des pôles simples aux points $z_1 = (z_1, y_1), \dots, z_p = (z_p, y_p)$ de S.
La fonction $P(x,y) = g(x,y) \prod_{1 \leqslant j \leqslant p} (x - x_j)$ est holomorphe sur S, à croissance polynomiale de degré p ; donc P est la restriction à S d'un polynôme de degré total $\leqslant p$, de même que la fonction

$$Q(x,y) = g(x,y) \prod_{1 \leqslant j \leqslant p} (y - y_j) .$$

On a sur S, $P . \prod_{1 \leqslant j \leqslant p} (y - y_j) = Q . \prod_{1 \leqslant j \leqslant p} (x - x_j)$, par conséquent cette égalité est vraie formellement (cf. démonstration du lemme 2; S n'est pas algébrique).
Par suite $\prod_{1 \leqslant j \leqslant p} (x - x_j)$ divise P, et g est holomorphe bornée sur S (i.e. $p = 0$) . Il en résulte que g et f sont constantes, contrairement à l'hypothèse.

3. Lien avec les fonctions automorphes.

Considérons l'application p de S dans $\mathbb{C} - \{0,1\}$ qui à $(x,y) \in S$ associe e^x.
p est un revêtement , et le groupe d'automorphismes de S

$(x,y) \mapsto (x + 2ij\pi\ ,\ y+2ik\pi)$, $j,k \in \mathbb{Z}$, opère transitivement sur les fibres de p.

Ce groupe est donc le groupe Aut(p) de tous les automorphismes du revêtement p.

D'autre part, il est bien connu que le revêtement universel de $\mathbb{C} - \{0,1\}$ s'identifie au demi-plan supérieur Π_+, avec pour groupe d'automorphismes le groupe Γ des homographies

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad ,$$

a,d entiers impairs, b,c pairs, $ad - bc = 1$ (RUDIN [3], section 16.20).

Γ est un groupe libre à deux générateurs

$$\sigma(z) = \frac{z}{2z + 1} \quad , \qquad \tau(z) = z + 2 \ ,$$

correspondant (avec des conventions adéquates de point-bases) aux lacets autour des points 0 et 1 dans le groupe fondamental de $\mathbb{C} - \{0,1\}$.

Notons $\lambda : \Pi_+ \longrightarrow \mathbb{C} - \{0,1\} \simeq \Pi_+/\Gamma$ la projection.

Il existe une flèche $q : \Pi_+ \longrightarrow S$ qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\Pi_+ \arrow[r, "q"] \arrow[d] & S \arrow[dl, "p"] \\
\mathbb{C} - \{0,1\} &
\end{tikzcd}$$

q est un revêtement, et puisque p est galoisien, Aut(q) est un sous-groupe distingué de Γ tel que

$\Gamma/\mathrm{Aut}(q) \simeq \mathrm{Aut}(p) \simeq \mathbb{Z}^2$.

Par conséquent Aut(q) est le groupe Γ' des commutateurs de Γ, de sorte que la surface S est définie explicitement comme quotient Π_+/Γ' du demi-plan supérieur. Une fonction holomorphe sur S s'identifie à une fonction automorphe invariante par Γ'. La proposition suivante précise cette question.

PROPOSITION. - *Soit* G *un groupe d'automorphismes du disque unité* D *opérant proprement et librement sur* D, X = D/G *l'espace quotient.*

(i) S'il existe une fonction holomorphe bornée non constante sur X, on a la condition de Blaschke uniforme

$$\sum_{g \in G} 1 - |g(z)| \leq C < \infty \text{ pour } z \in D .$$

(ii) S'il existe $z_o \in D$ tel que (ou de façon équivalente si pour tout $z_o \in D$, on a)

$$\sum_{g \in G} 1 - |g(z_o)| < \infty ,$$

alors le produit $\prod_{g \in G} |g(z)|^2$ est convergent, et définit une fonction sous-harmonique bornée non constante $\mathbb{R}$-analytique sur X.

Si B_a est le facteur de Blaschke associé au point $a \in D$, le produit $f(z) = \prod_{g \in G} B_{g(z_o)}(z)$ définit une fonction automorphe bornée invariante par le groupe G' des commutateurs de G (i.e. une fonction holomorphe bornée non constante sur le revêtement homologique X' = D/G' de X).

(iii) S'il existe une fonction harmonique positive non constante sur X, il existe une fonction holomorphe bornée non constante sur X'.

Remarque. - Pour le demi-plan supérieur, la condition de Blaschke (ii) s'écrit

$$\sum_{g \in G} \frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2} < \infty$$

avec $g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, $ad - bc = 1$.

Pour montrer que la surface S est de Liouville, il suffirait donc de vérifier que la série ci-dessus est divergente lorsque $G = \Gamma'$.

Malheureusement, nous n'y sommes pas parvenus, car les éléments de Γ' n'ont pas une expression simple.

Démonstration.

(i) Soit f une fonction automorphe non constante invariante par G, γ un automorphisme de D.

La fonction $F(w) = f \circ \gamma(w) - f(z)$ admet les points $\gamma^{-1} g(z)$ pour zéros.

On déduit aisément de la formule de Jensen que

$$F(0).\prod_{g\in G}\frac{1}{|\gamma^{-1}g(z)|}\leqslant\|F\|_\infty\leqslant 2\,\|f\|_\infty \text{ d'où } \sum_{g\in G}\mathrm{Log}\,\frac{1}{|\gamma^{-1}g(z)|^2}\leqslant 2\,\mathrm{Log}\,\frac{2\,\|f\|_\infty}{|f\circ\gamma(0)-f(z)|}.$$

D'autre part, un calcul facile montre que

$$\mathrm{Log}\,\frac{1}{|\gamma^{-1}g(z)|^2}\geqslant 1-|\gamma^{-1}g(z)|^2\geqslant\frac{1-|\gamma(0)|}{1+|\gamma(0)|}(1-|g(z)|^2)\ .$$

Choisissons deux points a_1 et a_2 tels que $f(a_1)\neq f(a_2)$, $|a_1|\leqslant|a_2|$, et deux automorphismes γ_1, γ_2 tels que $\gamma_1(0)=a_1$, $\gamma_2(0)=a_2$.

$$\text{Alors }\sum_{g\in G}1-|g(z)|\leqslant\sum_{g\in G}1-|g(z)|^2\leqslant 2\inf_{j=1,2}\frac{1+|a_j|}{1-|a_j|}\,\mathrm{Log}\,\frac{2\,\|f\|_\infty}{|f(a_j)-f(z)|}$$

$$\leqslant 2\,\frac{1+|a_2|}{1-|a_2|}\,\mathrm{Log}\,\frac{4\,\|f\|_\infty}{|f(a_1)-f(a_2)|}\ .$$

(ii) La convergence des produits infinis est bien connue (sous l'hypothèse $\sum_{g\in G}1-|g(z_0)|<\infty$; cf. RUDIN [3] , section 15.21), et il est clair que $\prod_{g\in G}|g(z)|^2$ est invariant par G.

Par ailleurs, posant $B_a(z)=\frac{|a|}{a}\,\frac{a-z}{1-\bar{a}z}$ pour $0<|a|<1$, $B_0(z)=z$, on a

$B_a\circ g=\mu\, B_{g^{-1}(a)}$, $g\in G$, avec $|\mu|=1$.

Par suite, pour tout $g\in G$, il existe une constante de module 1, μ_g, telle que $f\circ g=\mu_g f$.

On peut vérifier que $\mu_g=1$ lorsque g est une homographie parabolique, mais en général $\mu_g\neq 1$.

L'invariance de f par les commutateurs de G est néanmoins évidente.

(iii) Soit h une fonction harmonique positive invariante par G, f une fonction holomorphe telle que $h=\mathrm{Im}\,f=\frac{1}{2i}(f-\bar{f})$.

Pour tout $g\in G$, il existe une constante réelle μ_g telle que $f\circ g=f+\mu_g$, d'où l'invariance de f par G'.

f est à valeurs dans le demi-plan supérieur Π_+, et on construit une fonction holomorphe bornée en posant $F=\frac{f-i}{f+i}$.

(ii) et (iii) montrent l'intérêt qu'il y aurait à étudier le revêtement homologique S' de S. Mais le groupe fondamental de S est un groupe libre à une infinité de générateurs, et la surface S' est particulièrement difficile à décrire de manière exploitable.

Complément de bibliographie :

[3] RUDIN (W.). - *Real and complex analysis*, Mc Graw-Hill, 1966