Chapitre 4

Complétude

4.1 Parties complètes d'un e v n, espaces de Banach, espaces de Hilbert

1.1 Suites de Cauchy

Définition

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy ssi :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p, q \in \mathbb{N} \quad p \geq N,\ q \geq N \quad \|x_p - x_q\| < \varepsilon$

Proposition

Une suite convergente est de Cauchy.

Preuve

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de $(E, \|.\|)$. Soit $\ell = \lim_{n\to\infty} u_n$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q.

$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \quad \|u_n - \ell\| < \varepsilon/2$

Donc

$\forall p, q \in \mathbb{N} \quad p \geq N,\ q \geq N$

$\|u_p - u_q\| \leq \|u_p - \ell\| + \|u_q - \ell\| < \varepsilon.$ □

(178)

Proposition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E. Alors

1) la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

2) Toute suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy

3) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence, alors elle est convergente.

Preuve

1) Il existe N t.q.

$\forall n\in\mathbb{N}, n\geq N \quad \|x_n - x_N\| \leq 1.$

Donc

$\forall n\in\mathbb{N} \quad \|x_n\| \leq \max(\|x_0\|, \dots, \|x_N\|, \|x_N\|+1),$

donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

2) Soit $\varphi : \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ une application strictement croissante

Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. Il existe $N\in\mathbb{N}$ t.q.

$\forall p, q \in\mathbb{N} \quad p\geq N, q\geq N \quad \|x_p - x_q\| < \varepsilon$

Mais $\forall n\in\mathbb{N} \quad \varphi(n)\geq n.$

Donc

$\forall p, q\in\mathbb{N} \quad p\geq N, q\geq N \quad \|x_{\varphi(p)} - x_{\varphi(q)}\| < \varepsilon$

3) Soit ℓ une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $\varphi : \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante t.q.

$x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell.$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $N_1 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq N_1$
$\|x_{\varphi(n)} - \ell\| < \varepsilon/2$.

Soit $N_2 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall$ ~~$n \geq N_2$~~ $p, q \in \mathbb{N}$ $p \geq N_2, q \geq N_2$
$\|x_p - x_q\| < \varepsilon/2$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N := \max(N_1, N_2)$

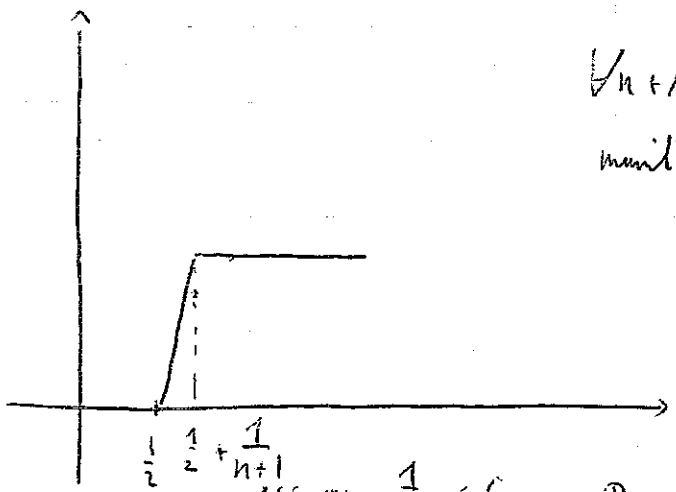
$$\|x_n - \ell\| \leq \|x_n - x_{\varphi(n)}\| + \|x_{\varphi(n)} - \ell\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \qquad \square$$

Attention. Il existe des suites de Cauchy qui ne sont pas convergentes !

Ex

Pour $n \in \mathbb{N}$

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ (n+1)(x - \frac{1}{2}) & \text{si } x \in]\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}] \\ 1 & \text{si } x \in]\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}, 1] \end{cases}$$



$\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n \in C([0,1], \mathbb{R})$ qu'on munit de $\|.\|_1$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $N \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Pour $p, q \geq N$:

$$\|f_p - f_q\|_1 = \int_0^1 |f_p(t) - f_q(t)| \, dt$$
$$\leq \int_{1/2}^1 |f_p(t) - 1| \, dt + \int_{1/2}^1 |f_q(t) - 1| \, dt$$
$$\leq \frac{1}{2(p+1)} + \frac{1}{2(q+1)} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

(180)

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente, $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ par $\|.\|_1$.

Regardons la valeur de f en $\frac{1}{2}$.

Si $|f(\frac{1}{2})| > 0$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ t.q.

$\forall x \in \left]\frac{1}{2}-\eta, \frac{1}{2}\right] \quad |f(x)| > |f(\frac{1}{2})|/2.$

Mais alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\|f_n - f\|_1 \geq \int_{1/2-\eta}^{1/2} |f(x)|\,dx \geq \eta \frac{|f(1/2)|}{2} > 0$$

absurde !

Donc $f(\frac{1}{2}) = 0$

Donc il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ t.q.

$\forall x \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\eta] \quad |f(x)| < \frac{1}{2}$

Soit $N = [\frac{2}{\eta}] + 1$.

Si $n \geq N$ on a $\forall x \in (\frac{1}{2} + \frac{\eta}{2}, \frac{1}{2} + \eta]$ $f_n(x) = 1$.

donc, pour $n \geq N$

$$\|f_n - f\|_1 \geq \int_{1/2+\eta/2}^{1/2+\eta} \frac{1}{2} = \eta/4 > 0$$

absurde !

cours 22

1.2. Parties complètes d'un espace vectoriel normé

cours 2

Définition

Soit $(E, \|.\|)$ un evn. Soit X une partie de E. On dit que X est complète ssi toute suite d'éléments de X qui est de Cauchy converge vers un élément de X.

Proposition

Toute partie compacte d'un evn est complète.

Preuve

Soit X une partie compacte de $(E, \|.\|)$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de X. Comme X est compacte, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence $l \in X$. Par l'assertion 3 de la proposition IV.1.1.2, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Donc X est complète.

Proposition

Toute partie complète d'un evn est fermée.

Preuve

Soit X une partie complète de $(E, \|.\|)$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X qui converge vers l. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy donc converge vers un élément de X donc $l \in X$. $\square$

Proposition

Soit $(E, \|\,\|)$ un evn. Soit A une partie complète de E et soit $B \subset A$. Alors

B est complète ssi B est fermé

Preuve

$\Rightarrow$ Cela résulte de la proposition précédente

$\Leftarrow$ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de B. Comme A est complet, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans A vers une limite l. Comme B est fermé, $l \in B$. □

1.3. Espaces de Banach

Définition

Soit E un evn. On dit que E est un espace de Banach si E est une partie complète de E.

Proposition

Un espace vectoriel de dimension finie est un espace de Banach.

Preuve

Soit E un ~~evn~~ espace vectoriel de dimension finie. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Par Bolzano-Weierstrass, elle admet une valeur d'adhérence l. Par l'assertion 3) de la proposition IV.4.1.1.2, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. □

Corollaire

Soit $(E, \|.\|)$ un evn de <u>dimension finie</u> et soit $A \subset E$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes
(i) A est fermé
(ii) A est complète

Preuve

E est un espace de Banach et l'équivalence suit de la proposition IV.4.1.23. □

~~Théorème~~ Proposition

Soit X un ensemble. Alors $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Rappel : $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ est l'algèbre des fonctions bornées sur X
et

$$\|.\|_\infty : \begin{array}{ccc} \mathcal{B}(X, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ f & \longmapsto & \sup_{x \in X} |f(x)| \end{array}$$

Preuve du ~~théorème~~ la proposition

- Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$. Soit $x \in X$ et soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q.

$\forall p, q \in \mathbb{N}\ p \geq N, q \geq N \quad \|f_p - f_q\|_\infty < \varepsilon$

Donc

$\forall p, q \in \mathbb{N} \quad p \geq N, q \geq N \quad |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon$

donc la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels qui est de Cauchy et donc convergente. On définit donc

$$f : \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lim_{n \to \infty} f_n(x) \end{array}$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $N \in \mathbb{N}$ t.q.
$\forall p, q \in \mathbb{N} \quad p \geq N, q \geq N \quad \|f_p - f_q\| < \varepsilon/2$

Alors si $p \in \mathbb{N}$ vérifie $p \geq N$ et $x \in X$

On a $\forall q \in \mathbb{N} \; q \geq N \quad |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon/2$

Donc $|f_p(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$

En particulier $\forall x \in X \quad |f(x)| < \|f_p(x)\| + \varepsilon \leq \|f_p\| + \varepsilon$

donc $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$

et $\forall p \in \mathbb{N}, p \geq N \quad \|f_p - f\|_\infty < \varepsilon$

donc $f_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f$. □

Corollaire

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Alors $(\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Preuve

On a vu que $(\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ un fermé de $(\mathcal{B}([a,b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ □

1.4. Espaces de Banach et séries

Définition

- Soit $(E, \|.\|)$ un evn et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On appelle série de terme u_n et on note $\sum u_n$ la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
Si la série converge, on note
$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$
- Si $E = \mathbb{R}$, on parle de série réelle.
Si $E = \mathbb{C}$, on parle de série complexe.

Remarque

- Si $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont des séries convergentes et si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors la série
$\sum_n (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge vers $\lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.
- Si $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ sont des espaces vectoriels normés, si $\sum u_n$ est une série convergente de E et si $f : E \to F$ est une application linéaire continue, alors la série $\sum_n f(u_n)$ converge vers $f\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)$.

(En effet $\sum_{k=0}^{n} f(u_n) = f\left(\sum_{k=0}^{n} u_n\right)$)

Théorème

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Si la suite $\sum_n \|u_n\|$ converge alors la série $\sum_n u_n$ converge.

Définition

Si la série $\sum_n \|u_n\|$ converge, on dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

Preuve du théorème

Soient $p, q \in \mathbb{N}$ avec $p \leq q$. Alors

$$(*) \quad \left\|\sum_{k=0}^{q} u_k - \sum_{k=0}^{p} u_k\right\| \leq \left\|\sum_{k=p}^{q} u_k\right\| \leq \sum_{k=p}^{q} \|u_k\|$$

Si la série $\sum_k \|u_k\|$ converge, alors la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \|u_k\|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Par $(*)$ la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Comme E est un espace de Banach (donc complet) cette suite est convergente. □

Attention : il reste des suites convergentes qui ne sont pas absolument convergentes.

Exemple (Critère d'Abel)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ~~positifs~~ positifs t.q.

- $\forall n\in\mathbb{N}$ $\quad u_{n+1} < u_n$
- $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Alors $\sum_n (-1)^n u_n$ converge.

En effet si $p \le q$

$$\left| \sum_{k=p}^{q} (-1)^k u_k \right| \le |u_p| ,$$

donc la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy donc convergente.

- En particulier $\sum_n \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ est convergente.

Mais

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{t}\, dt$$

$$= \int_{1}^{n+2} \frac{1}{t}\, dt = \log(n+2)$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty .$$

Application 1

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Si $\sum |u_n|$ converge, alors $\sum_n u_n$ converge.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes.

Si $\sum_n |u_n|$ converge, alors $\sum_n u_n$ converge.

<u>Définition</u> (Algèbre de Banach)

Une algèbre de Banach est une paire $(A, \|.\|)$ où A est une $\mathbb{R}$-algèbre et $\|.\|$ une norme sur le $\mathbb{R}$ espace vectoriel A t.q.

(i) A est complet pour $\|.\|$
(i.e. A est un espace de Banach)

(ii) $\forall a, b \in A \quad \|a \cdot b\| \leq \|a\| \, \|b\|$
(la norme est sous-multiplicative)

cours 23

cours 24 <u>Exemples</u>

1) $(\mathbb{R}, |.|)$ ou $(\mathbb{C}, |.|)$ est une algèbre de Banach.

2) Soit X un ensemble. Alors $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ est une algèbre de Banach

En effet :

- On a vu la condition (i).
- Si $f, g \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$

$\forall x \in X \quad |f \cdot g(x)| = |f(x) g(x)| \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$

Donc
$$\|f \cdot g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$$

En particulier $C([a,b], \mathbb{R})$ est une algèbre de Banach.

3) Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors $\mathcal{L}(E)$ muni de $|||.|||$ est une algèbre de Banach.

En effet

- $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie, donc complet (pour n'importe quelle norme)

- On a vu que

$\forall f, g \in \mathcal{L}(E) \quad |||f \circ g||| \leq |||f|||\,|||g|||$.

C'est un exemple d'algèbre de Banach non commutative.

4) En particulier (pour $E = \mathbb{R}^n$) on obtient une norme $|||.|||$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sorte que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), |||.|||)$ est une algèbre de Banach.

<u>Proposition</u>

Soit $(A, \|.\|)$ une algèbre de Banach. Pour tout $a \in A$, la série

$$\sum_k \frac{a^k}{k!} \quad \text{converge absolument}$$

On définit l'application exponentielle

$$\exp : \begin{array}{l} A \longrightarrow A \\ a \longmapsto e^a = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \end{array}$$

NB : Comme A est de Banach, convergence absolue $\Rightarrow$ convergence.

Preuve

Soit N un entier t.q. $N > \|a\|$. Si $k \geq N$, on a

$$\frac{\|a^k\|}{k!} \leq \frac{\|a\|^k}{k \times (k-1) \times \cdots \times (N+1)} \leq \frac{\|a\|^k}{N^{k-N}}$$

$$\leq N^N \underbrace{\left(\frac{\|a\|}{N}\right)^k}$$

terme d'une série convergente,

donc la série converge absolument.

Exemple

* Pour $A = \mathbb{C}$ on retrouve la fonction

$$\exp : \begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \sum_n \frac{z^n}{n!} \end{array}$$

* Si $A = \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ alors

$$\exp : \begin{array}{l} A \longrightarrow A \\ f \longmapsto \exp \circ f \end{array}$$

En effet la ~~série~~ suite $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^k}{k!}$

converge uniformément vers $\exp(f)$ et donc simplement. Donc

$$\forall x \in X \quad \exp(f)(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f(t)^k}{k!}$$

$$= \exp(f(t)).$$

, L'application exponentielle pour des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$

Proposition

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de $\mathbb{R}_+$ tels que $\sum_k a_k$ et $\sum_k b_k$ convergent. Alors la série

$$\sum_k \left(\sum_{p+q=k} a_p b_q \right)$$

converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{p+q=k} a_p b_q \right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right)$$

Preuve

, $$\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{p+q=k} a_p b_q \right) = \sum_{\{(p,q)\in\mathbb{N}^2 : p+q\le n\}} a_p b_q$$

$$\le \sum_{\{(p,q)\in\mathbb{N}^2 : \max(p,q)\le n\}} a_p b_q$$

$$= \left(\sum_{p=0}^{n} a_p \right) \left(\sum_{q=0}^{n} b_q \right)$$

$$\le \left(\sum_{p=0}^{\infty} a_p \right) \left(\sum_{q=0}^{\infty} b_q \right)$$

Donc la suite $\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{p+q=k} a_p b_q \right)$

est croissante et majorée donc convergente et

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{p+q=k} a_p b_q \right) \leq \left(\sum_{p=0}^{\infty} a_p \right) \left(\sum_{q=0}^{\infty} b_q \right)$$

D'autre part

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right) \left(\sum_{k=0}^{n} b_k \right)$$

$$= \sum_{\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \,:\, \max(p,q) \leq n\}} a_p b_q$$

$$\leq \sum_{\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \,:\, p+q \leq 2n\}} a_p b_q$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} \sum_{p+q=k} a_p b_q$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p+q=k} a_p b_q$$

Mais $\begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x \cdot y \end{array}$ est continue

et

$$\left(\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right), \left(\sum_{k=0}^{n} b_k \right) \right) \longrightarrow \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \, , \, \sum_{k=0}^{\infty} b_k \right)$$

donc en passant à la limite en n on obtient

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{p+q=k} a_p b_q \right).$$

Corollaire

Soit $(A, \|.\|)$ une algèbre de Banach. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de A t.q. $\sum_k a_k$ et $\sum_k b_k$ convergent absolument. Alors la série

$$\sum_k \Big(\sum_{p+q=k} a_p b_q \Big)$$

converge absolument et

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{p+q=k} a_p b_q \Big) = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \Big) \Big(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \Big)$$

Preuve

, $$\Big\| \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \Big) \Big(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \Big) - \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{n} a_p b_q \Big\|$$

$$\leq \Big\| \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \Big) \Big(\sum_{k=0}^{\infty} b_k - \sum_{k=0}^{n} b_k \Big) \Big\|$$

$$+ \Big\| \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k \Big) \sum_{k=0}^{n} b_k \Big\|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| \sum_{k=n}^{\infty} \|b_k\|$$

$$+ \sum_{k=n}^{\infty} \|a_k\| \sum_{k=0}^{\infty} \|b_k\| \longrightarrow 0, \ n \to \infty$$

, On a pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\Big\| \sum_{p+q=k} a_p b_q \Big\| \leq \sum_{p+q=k} \|a_p b_q\| \leq \sum_{p+q=k} \|a_p\| \|b_q\|$$

La convergence absolue résulte donc de la proposition.

$$\Big\| \sum_{p+q \le n} a_p b_q - \Big(\sum_{p=0}^{n} a_p\Big)\Big(\sum_{q=0}^{n} b_q\Big) \Big\|$$

$$\le \sum_{k=n}^{2n} \sum_{p+q=k} \|a_p\| \|b_q\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

puisque la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \sum_{p+q=k} \|a_p\|\|b_q\| \right)_{n\in\mathbb{N}}$

est de Cauchy.

Corollaire du Corollaire

Soit $(A, \|.\|)$ une algèbre de Banach et soit $a, b \in A$ t.q $\boxed{ab = b\cdot a}$

Alors

$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$$

Attention : Fausse si $ab \neq ba$.

Preuve du corollaire du corollaire

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(a+b)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} a^p b^{k-p}}{\cancel{p}\ k!}$$

Formule du binôme

Valable car $ab = ba$.

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p+q=k} \frac{1}{p!\,q!} a^p b^q$$

On applique alors le corollaire.

Séries de fonctions

Définition

Soit X un ensemble et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$. On dit que la série $\sum_k f_k$ converge normalement sur $Y \subset X$ ssi la série

$\sum_k f_k|_Y$ converge absolument dans $(\mathcal{B}(Y,\mathbb{R}), \|\,\|_\infty)$

NB : La convergence absolue de $\sum_k f_k|_Y$ sur Y entraîne la convergence uniforme de la suite $(\sum_{k=0}^{n} f_k|_Y)_{n\in\mathbb{N}}$.

Cas particulier : les séries entières

Définition

- On appelle série entière réelle toute série de fonctions $\sum_k a_k x^k$ où $a_k x^k : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto a_k x^k\end{array}$ avec $a_k \in \mathbb{R}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- Si A est une partie non majorée de $\mathbb{R}$ on note $+\infty = \sup(A)$

On définit le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_k x^k$ comme

$$R = \{\sup\{t\in\mathbb{R}_+ : \{|a_n|t^n\} : n\in\mathbb{N}\} \text{ est majoré}\}$$

(196)

Proposition

Avec les notations qui précèdent. Pour tout $r \in [0, R[$, la série $\sum_k a_k x^k$ converge normalement sur $[-r, r]$.

Preuve

Il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ et $M \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |a_n (r+\eta)^n| < M$$

Alors pour $t \in [-r, r]$, on a

$$|a_n t^n| \leq \left| a_n (r+\eta)^n \left(\frac{|t|}{r+\eta} \right)^n \right|$$

$$\leq M \underbrace{\left(\frac{|t|}{r+\eta} \right)^n}_{\text{terme d'une série convergente.}} \qquad \square$$

Cours 24

Cours 25 1.5. Les espaces ℓ^p

Définition

Soit p un nombre réel ≥ 1; pour toute suite $X = (X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}$ ~~(ou de $\mathbb{C}$)~~, nous définissons le nombre positif $\|.\|_p$, fini ou infini, par

$$\|X\|_p^p := \sum_i |X_i|^p.$$

Définition / Proposition ~~($\mathbb{C}^n$)~~

Soit $\ell^p := \{X = (X_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;.\; \|X\|_p < \infty\}$.
$(\ell^p, \|.\|_p)$ est un espace vectoriel normé.

Preuve :

(i) Soit $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^p$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\|\lambda x\|_p = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |\lambda|^p |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|x\|_p .$$

(ii) Soient $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^p$. De l'inégalité de Minkowski (Théorème II.1.1) on déduit pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\left(\sum_{i=0}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=0}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=0}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}$$

$$\leq \|x\|_p + \|y\|_p ,$$

d'où

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p .$$

(iii) Soit $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^p$. On a $\|x\|_p \geq 0$. Si

$\|x\|_p = 0 \Rightarrow \forall i \in \mathbb{N} \quad x_i = 0$, i.e. $x = 0$,

Il résulte de (i), (ii) que ℓ^p est un espace vectoriel.

NB : ℓ^1 est l'espace des séries absolument convergentes.

Proposition

L'espace ℓ^p est complet.

On aura besoin du lemme suivant :

Lemme

Soit $(a_i(\lambda))_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs dépendant d'un paramètre $\lambda \in \mathbb{N}$. On suppose :

(i) $\exists\, k \in \mathbb{R}_+ \quad \forall \lambda \in \mathbb{N} \quad \sum_{i=0}^{\infty} a_i(\lambda) \leq k$

(ii) $\exists\, (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad \lim_{\lambda \to \infty} a_i(\lambda) = a_i$.

Alors on a

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \leq k .$$

198

Preuve

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(\alpha) \leq k, \text{ d'où}$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \leq k.$$

Le membre de droite étant indépendant de n on obtient :

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \leq k. \qquad \square$$

Preuve de la proposition

Soit $(x(n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans ℓ^p ; pour tout $i \in \mathbb{N}$, la relation

$|x_i(r) - x_i(s)| \leq \| x(r) - x(s) \|_p$

montre que la suite des nombres $x_i(n)$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) ; désignons par x_i sa limite.

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists N \ \forall r, s \in \mathbb{N} \ r \geq N, s \geq N$

$$\sum_{i=0}^{\infty} |x_i(r) - x_i(s)|^p \leq \varepsilon ;$$

si l'on fait tendre s vers $+\infty$, le lemme montre que l'on a aussi

$$\sum_{i=0}^{\infty} |x_i(r) - x_i|^p \leq \varepsilon. \qquad (*)$$

~~Ceci montre d'abord que la~~ ~~famille~~ ~~suite $x_i(r) - x_i$ est un élément de ℓ^p~~ ~~comme c'est vrai aussi pour la suite~~

~~L'inégalité (*) entraine~~

$$\cancel{\|x\|_p \leq \| x(r) \|_p + \varepsilon^{1/p}}$$

Comme $x(r) \in \ell^p$ ceci montre $x \in \ell^p$.

De l'inégalité (*) on déduit

$$\|x\|_p \le \|x(r)\|_p + \varepsilon^{1/p}.$$

Comme $x(r) \in \ell^p$ ceci montre $x \in \ell^p$.

Aussi l'inégalité (*) s'écrit :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall r \in \mathbb{N} \ r \geq N \quad \|x(r) - x\|_p \leq \varepsilon^{\frac{1}{p}}$,

donc $x(n) \xrightarrow[n \to \infty]{} x \quad \ell^p$. □

1.6. Espaces de Hilbert

Définition

Un espace de Hilbert est un espace ~~pré~~ pré-hilbertien qui est complet.

N.B. : Un espace de Hilbert est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni d'une forme bilinéaire symétrique définie positive $\langle \cdot , \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$$x \longmapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Exemples

1) $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot , \cdot \rangle)$, $\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

On a déjà vu dans le chapitre 2 que $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. D'après la proposition IV.1.3.1. ~~$(\mathbb{R}^n, \sqrt{\langle \cdot , \cdot \rangle})$ est complet~~ $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ est complet.

2) $(\ell^2, \langle\!\langle \cdot , \cdot \rangle\!\rangle)$ $\quad \langle\!\langle x, y \rangle\!\rangle := \sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i$.

$\langle\!\langle \cdot , \cdot \rangle\!\rangle$ est clairement une forme bilinéaire symétrique sur E. Nous avons vu dans la section 1.5. qu'elle est définie positive et que $(\ell^2, \sqrt{\langle\!\langle \cdot , \cdot \rangle\!\rangle})$ est complet. $(\ell^2, \langle\!\langle \cdot , \cdot \rangle\!\rangle)$ est donc un espace de Hilbert.

(200)

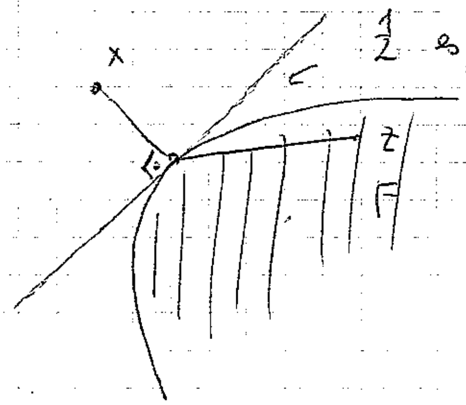
Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace pré-hilbertien. Soit $F \subset E$ une partie complète non vide et convexe de E.

Théorème (de la projection)
Pour tout $x \in E$

(i) il existe un unique $p \in F$ t.q.
$$d(x, F) = \|x - p\|$$

(ii) Si $p \in F$, on a
$$d(x, F) = \|x - p\| \Leftrightarrow \forall z \in F \ \langle x - p, z - p \rangle \leq 0$$

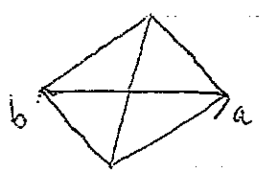
Dessin



Pour montrer le théorème, on commence par un lemme.

Lemme (identité du parallélogramme)
Soit $a, b \in E$. On a :
$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$$

NB :



Somme des carrés des diagonales = sommes des carrés des côtés.

Preuve du lemme

$$\|b+a\|^2 + \|b-a\|^2 = \langle b+a, b+a\rangle + \langle b-a, b-a\rangle$$
$$= 2\langle b,b\rangle + 2\langle a,a\rangle. \quad \square$$

Preuve du théorème

Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F t.q.

$$\|x - x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} d(x,F)$$

Soient $p, q \in \mathbb{N}$

Comme F est convexe $\frac{x_p + x_q}{2} \in F$. Par le lemme :

$$\|x_p - x_q\|^2 = 2\|x - x_p\|^2 + 2\|x - x_q\|^2 - \|2x - x_p - x_q\|^2$$

$$= 2\|x - x_p\|^2 + 2\|x - x_q\|^2 - 4\left\|x - \frac{x_p + x_q}{2}\right\|^2$$

$$\leq 2\left(\|x - x_p\|^2 - d(x,F)^2\right) + 2\left(\|x - x_q\|^2 - d(x,F)^2\right)$$

$$\|x - x_n\|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} d(x,F)^2$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \quad \|x - x_n\|^2 - d(x,F)^2 < \varepsilon/4$$

Si $p \geq N$ et $q \geq N$, alors

$$\|x_p - x_q\| < 4 \cdot \varepsilon/4 = \varepsilon.$$

Donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Comme F est <u>complet</u>, elle est convergente d'où l'existence dans (i).

Supposons que $d(x,F) = \|x-p\|$ avec $p\in F$. Soit $z\in F$. Comme F est convexe, ~~pour~~ pour $t\in[0,1]$ on a $(1-t)p + tz \in F$, d'où

$$\|x-p\|^2 \le \|x-((1-t)p+tz)\|^2,$$

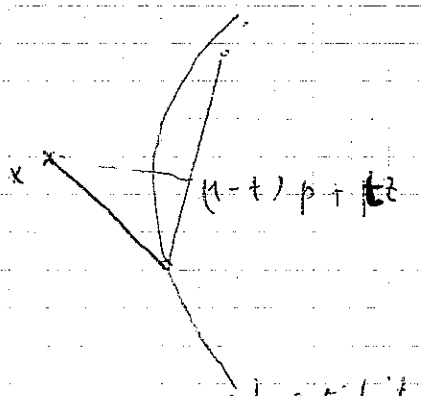
c.à.d. pour tout $t\in[0,1]$

$$\langle x-p, x-p\rangle \le \langle x-p,x-p\rangle + 2t\langle x-p, p-z\rangle + t^2\langle p-z,p-z\rangle$$

donc $\langle x-p,p-z\rangle \ge 0$ et

$\langle x-p, z-p\rangle \le 0.$

<u>Dessin</u>



Si l'angle est aigu il y a un point de $[p,z]$ plus proche de x.

Inversement si l'inégalité est satisfaite $\forall z\in F$: $\|x-z\|^2 = \|x-p\|^2 + 2\langle x-p, p-z\rangle + \|p-z\|^2 \geq \|x-p\|^2$.

Si $p, p'\in F$ vérifient

$\forall z\in F$ $\quad \langle x-p, z-p\rangle\le 0 \quad \langle x-p', z-p'\rangle \le 0$

alors

$$\langle p'-p, p'-p\rangle = \langle p'-x, p'-p\rangle + \langle x-p, p'-p\rangle \le 0$$

donc $p=p'$, ce qui montre l'unicité dans (i). □

Définition

$\boxed{\text{On dit que } p \text{ est \underline{le projeté} de } x \text{ sur } F.}$

Corollaire

Si F est un sous-espace vectoriel complet de E (e.g. F de dimension finie) alors pour tout x de E

(i) il existe un unique $p \in F$ t.q. $d(x, F) = \|x - p\|$

(ii) Si $p \in F$, on a

$$d(x, F) = \|x - p\| \Leftrightarrow \forall z \in F \quad \langle x - p, z \rangle = 0$$

~~tu~~

p est le projeté orthogonal de x sur F.

cours 25

cours 26

Preuve "$\Leftarrow$" suit du théorème en notant que $z - p \in F$ $\forall z \in F$.

"$\Rightarrow$" Il suffit de montrer que

Si $d(x, F) = \|x - p\|$ et si $z \in F$ alors

$\langle x - p, z \rangle \leq 0$ (on obtient l'égalité en prenant $-z$).

Mais

$$\langle x - p, z \rangle = \langle x - p, \underbrace{z + p}_{\in F} - p \rangle . \qquad \square$$

Attention : il existe des hyperplans H d'espaces vectoriels préhilbertiens t.q.

$$\forall x \in E \qquad d(x, H) = 0 .$$

Ex

$(C([0,1], \mathbb{K}), \langle , \rangle)$ défini par

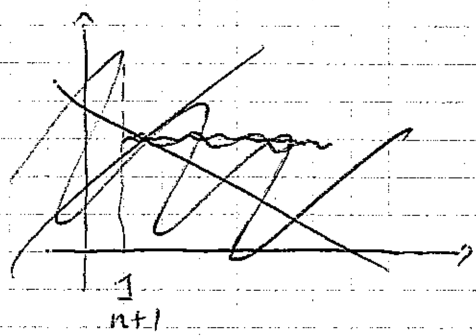
$$\langle f, g \rangle = \int_{[0,1]} f \cdot g .$$

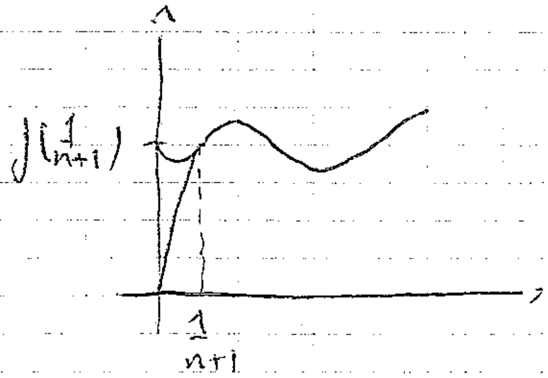
204

On considère $ev_0 : \begin{array}{l} C([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto f(0) \end{array}$

et $H = \mathrm{Ker}(ev_0)$. Si $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ on pose

$$f_n : \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \begin{cases} f\left(\frac{1}{n+1}\right)(n+1)t & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{n+1}\right] \\ f(t) & \text{si } t \in \left[\frac{1}{n+1}, 1\right] \end{cases} \end{array}$$





On a $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ par $\|\cdot\|_2$

(cf II.7),

donc $d(f, H) = 0$.

<u>Exemples</u>

1) Si F est de dimension finie n et $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de F, on a que la projection orthogonale sur F est l'application

$$\begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \end{array}$$

En effet pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\langle x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j , e_i \rangle$$

$$= \langle x, e_i \rangle - \langle x, e_i \rangle = 0.$$

Donc pour tout $z \in F$

$$\langle x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i , z \rangle = 0$$

et on applique (ii).

2) On considère $E = (C([0, 2\pi], \mathbb{R}), \langle , \rangle)$ où pour $f, g \in C([0, 2\pi], \mathbb{R})$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f \cdot g$$

Soit $F_n \subset C([0, 2\pi], \mathbb{R})$ le sous-espace engendré par 1 et les applications

$$\begin{array}{rcl} [0, 2\pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(kx) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} [0, 2\pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(kx) \end{array}$$

pour $k \in \{1, \dots, n\}$.

On a pour $p \geq 1$ et $q \geq 1$

$$\langle \cos(px), \cos(qx) \rangle$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos(pt) \cos(qt) \, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(\cos((p+q)t) + \cos((p-q)t) \right) dt$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ \pi & \text{sinon} \end{cases}$$

206

$\langle\, ,\, \rangle$	1	$\cos(px)$	$\sin(px)$
1	2π	0	0
$\cos(qx)$	0	$\pi\,\delta_{p,q}$	0
$\sin(qx)$	0	0	$\pi\,\delta_{p,q}$

Autrement dit

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(x), \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(x), \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)$$

est une base orthonormée de F_n.

En appliquant l'exemple précédent on obtient que l'application $f_n \in F_n$ qui minimise

$$\|f - f_n\|_2$$

est donnée par

$$f_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + \sum_{\ell=1}^{n} b_\ell \sin(kx)$$

avec

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,dt,$$

$$b_\ell = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(\ell t)\,dt.$$

On retrouve le calcul des séries de Fourier!

1.7. Théorème du point fixe

Théorème

Soit E un espace vectoriel normé. Soit A une partie complète de E et $f : A \to A$ une application contractante, c.a.d. lipschitzienne avec constante de Lipschitz $k < 1$.

Alors

(i) il existe un unique $z \in A$ t.q. $f(z) = z$.

(ii) Soit $a \in A$ ~~défini par $u_0 = a$~~ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de A défini par $u_0 = a$ et

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|u_n - z\| \leq k^n \|u_0 - z\|$

et $u_n \longrightarrow z$, $n \to \infty$.

Preuve

. Soit $a \in A$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de A défini par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

Si $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\|u_{n+2} - u_{n+1}\| = \|f(u_{n+1}) - f(u_n)\|$$
$$\leq k\,\|u_{n+1} - u_n\|$$

Par récurrence on obtient

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq k^n \|u_1 - u_0\|$$

Donc si $p, q \in \mathbb{N}$ avec $p \leq q$ on a

$$\|u_q - u_p\| \leq \|u_q - u_{q-1}\| + \cdots + \|u_{p+1} - u_p\|$$

208

$$\leq \left(k^p + k^{p+1} + \dots + k^{q-1}\right) \| u_1 - u_0 \|$$

$$= \frac{k^p - k^q}{1-k} \| u_1 - u_0 \| \leq \frac{k^p}{1-k} \| u_1 - u_0 \|$$

Donc

$$\forall p, q \in \mathbb{N} \qquad \| u_p - u_q \| \leq \frac{k^{\inf(p,q)}}{1-k} \| u_1 - u_0 \|$$

Comme $k < 1$, la suite est de Cauchy.

Comme A est complet la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un élément ℓ de A. Comme f est continue, on a $f(\ell) = \ell$, donc f admet un point fixe.

. Si $f(\ell) = \ell$ et $f(\ell') = \ell'$ on a

$$\| \ell' - \ell \| = \| f(\ell') - f(\ell) \| \leq k \| \ell' - \ell \|, \text{ d'où}$$

$$(1-k) \| \ell' - \ell \| \leq 0, \text{ d'où } \ell' = \ell.$$

. Si $a \in A$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ défini par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$, on a

$$\| u_{n+1} - \ell \| = \| f(u_n) - f(\ell) \| \leq k \| u_n - \ell \|$$

Par récurrence

$$\| u_n - \ell \| \leq k^n \| u_0 - \ell \|. \qquad \square$$

<u>NB</u> : Très utile pour les équations différentielles.

<u>Exemple</u>

1) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $k \in [0, 1[$ et $f : [a,b] \to [a,b]$ application de classe C^1 t.q.

$$\forall x \in [a,b] \qquad |f'(x)| \leq k$$

Alors $\forall x, y \in [a,b] \quad |f(x) - f(y)| = \int_x^y f'(t)\,dt$

$\leq k|x-y|.$

2) Si A n'est pas complet

$A =]0,1]$ et $f :]0,1] \longrightarrow]0,1]$

$x \longmapsto x/3$

$f^n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ pour $x \in]0,1]$.

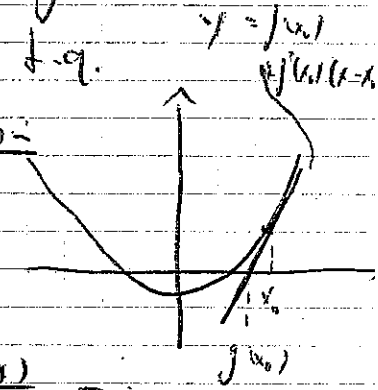
<u>Application : la méthode de Newton</u>

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 t.q. telle qu'il existe $c \in [a,b]$ avec $f(c) = 0$, $f'(c) \neq 0$.

Comme f' est continue, il existe un intervalle fermé d'intérieur non vide $I \subset [a,b]$ contenant c t.q.

$\forall t \in I \quad f'(t) \neq 0$

Dessin



Soit

$$g : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} \end{array}$$

Soit $x \in I$. On a $g(x) = x \iff x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} = x$

$\iff f(x) = 0$ et $g'(c) = 1 - \dfrac{f'(c)^2 - f(c) f''(c)}{f'^2(c)} = 0$.

Donc il existe un intervalle $J \subset I \subset [a,b]$ fermé, d'intérieur non vide et contenant c t.q.

$\forall t \in J \qquad |g'(t)| < \frac{1}{2}$

Si $t \in J$ on a $|g(t) - g(c)| \leq \frac{1}{2}|t - c|$

$\qquad \| $

$|g(t) - c|$ donc $g(t) \in J$

(210) et l'application induite $\begin{array}{l} J \to J \\ t \to g(t) \end{array}$

est contractante.

Si $a \in J$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de J définie par $u_0 = a$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = g(u_n)$ vérifie $u_n \to c$, $n \to \infty$.

<u>Remarque</u> (à propos de la vitesse de convergence)

$f \in C^3([a,b], \mathbb{R})$. On a :

$$f'(c+h) = f'(c) + f''(c)\,h + o(h)$$

$$f(c+h) = \underset{0}{\overset{\shortparallel}{f(c)}} + f'(c)h + \frac{f''(c)}{2}h^2 + o(h^2)$$

Donc

$$g(c+h) = c+h - \frac{f'(c)h + \frac{f''(c)}{2}h^2 + o(h^2)}{f'(c) + f''(c)h + o(h^{3})}$$

$$= c+h - \left(f'(c)h + \frac{f''(c)}{2}h^2 + o(h^2)\right)$$

$$\left(\frac{1}{f'(c)} - \frac{1}{2}\frac{1}{f'(c)^2}\left(f''(c)h + o(h)\right) + o(h)\right)$$

$$= (c+h) - \left(h - \frac{f''(c)}{2f'(c)}h^2 + o(h^2)\right)$$

D'où

$$g(c+h) - g(c) = \frac{f''(c)}{2f'(c)}h^2 + o(h^2)$$

Donc quitte à réduire J, on peut supposer qu'il existe A t.q.

$$\forall \overset{x \in J}{\cancel{(x,y) \in J^2}} \quad |g(x) - g(c)| \leq A|x - c|^2$$

D'où en prenant $x = u_n$ ~~et $y = c$~~

$$A|u_{n+1} - c| \leq (A|u_n - c|)^2$$

d'où $$|u_n - c| < \frac{1}{A}\left(\underbrace{A|u_0 - c|}_{\text{si } < \frac{1}{10}}\right)^{2^n}$$

le nombre ~~le~~ de décimales calculées double à chaque pas.

Exemple : Calcul de $\sqrt{2}$ via $f = x^2 - 2$.

2 Complétude et applications continues

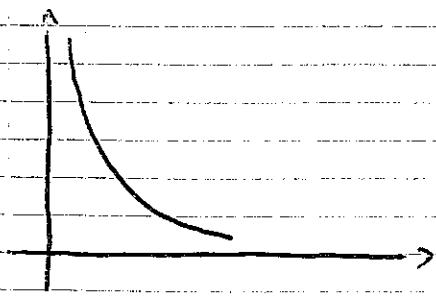
2.1. Prolongement des applications uniformément continues

Théorème

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des evn. On suppose que F est un espace de Banach. Soient $A \subset E$ et A' une partie dense de A. Soit $f : A' \to F$ une application uniformément continue. Alors il existe une unique application $\tilde{f} : A \to F$ uniformément continue t.q. $\tilde{f}|_{A'} = f$.

Attention : ne marche pas si la continuité de f n'est pas uniforme !

Exemple



$$f :]0, 1] \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$

ne s'étend pas en une fonction continue $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$!

(212)

Preuve du théorème

* Unicité : Si $\tilde{f}_1 : A \to F$ et $\tilde{f}_2 : A \to F$ vérifient $\tilde{f}_1|_{A'} = f = \tilde{f}_2|_{A'}$ alors $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ puisque A' est dense dans A (Théorème II.8.3.1).

Le problème est l'existence. On commence par le

Lemme

Sous les hypothèses du théorème. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A' qui est de Cauchy. Alors $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de F.

Preuve

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme f est uniformément continue il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ t.q.

$\forall x, y \in A' \quad \|x-y\|_E < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F < \varepsilon.$

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q.

$\forall p, q \in \mathbb{N} \quad p \geq N, q \geq N \quad \|u_p - u_q\|_E < \eta$

Donc

$\forall p, q \in \mathbb{N} \quad p \geq N, q \geq N \quad \|f(u_p) - f(u_q)\| < \varepsilon$

Donc $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. $\square$

cours 26

Suite de la preuve du théorème

Remarque : Soit $a \in A$, on veut trouver $\tilde{f}(a) \in F$.
Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A' t.q. $u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a$, alors on doit avoir

$$f(u_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \tilde{f}(a).$$

- Soit $a \in A$. Comme A' est dense dans A, on peut choisir une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A' t.q. $u_n \to a$, $n \to \infty$.
Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente (dans E), c'est une suite de Cauchy. Donc $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Comme F est complet, la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

- Montrons que sa limite est indépendante du choix de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A' t.q. $v_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a$, alors la suite w_n définie par

$$w_n = \begin{cases} u_{n/2} & \text{si } n \; \cancel{\equiv 0 \, (2)} \text{ pair} \\ v_{\frac{n-1}{2}} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} w_0 & w_1 & w_2 & \cdots \\ \| & \| & \| & \\ u_0 & v_0 & u_1 & \cdots \end{pmatrix}$$

converge vers a.

Donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Donc $[f(w_n)]_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Donc $\quad f(w_{2n+1}) - f(w_{2n}) \to 0, \; n\to\infty$

i.e. $\quad f(v_n) - f(u_n) \to 0, \; n\to\infty,$

d'où $\quad \lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(v_n).$

Il existe donc une application $\hat{f} : A \to F$ t.q. pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A' convergeant vers un élément a de A

$$\hat{f}(a) = \lim_{n\to\infty} f(u_n).$$

- Montrons que $\hat{f}$ est uniformément continue. Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. Comme f est uniformément continue il existe $\eta_1\in\mathbb{R}_+^*$ t.q.

$$\forall x, y\in A' \quad \|x-y\|_E < \eta_1 \Rightarrow \|f(x)-f(y)\|_F < \varepsilon/2$$

Posons $\eta = \eta_1/2$.

Soient $x, y\in A$ t.q. $\|x-y\| < \eta$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$) une suite d'éléments de A' convergeant vers x (resp. y). Il existe des entiers $N_1, N_2\in\mathbb{N}$ t.q.

$\forall n\in\mathbb{N} \quad n\geq N_1 \quad \|u_n - x\|_E < \eta_1/4$

$\forall n\in\mathbb{N} \quad n\geq N_2 \quad \|v_n - y\|_E < \eta_1/4.$

Si $n\geq \max(N_1, N_2)$ on a

$\|u_n - v_n\|_E \leq \eta_1$ donc $\|f(u_n) - f(v_n)\|_E < \varepsilon/2$

En passant à la limite $\|\hat{f}(x) - \hat{f}(y)\| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$ □

Application 1

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Considérons l'espace vectoriel normé $(\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ des fonctions en escalier sur $[a,b]$ et

$$I : \begin{array}{ccc} \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_a^b f, \end{array}$$

alors I est une application linéaire continue (avec $|||I||| = 1$) donc uniformément continue. Donc I s'étend à

$$\tilde{I} : \begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_a^b f \end{array}$$

où $\overline{\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})}$ est l'adhérence de $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ dans $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$.

Une application $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite réglée ssi $f \in \overline{\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})}$

(toute fonction continue sur $[a,b]$ est réglée).

Cela définit donc l'intégrale des fonctions réglées.

Corollaire

Soit $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ une application dérivable.

(i) Si f' est bornée alors f se prolonge en une application continue $\tilde{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$

(ii) Si $\lim_{x \to a^+} f'(x) = \ell$, alors f se prolonge en une application dérivable $\tilde{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$ t.q. $\tilde{f}'(a) = \ell$.

2/6

Preuve

(i) Si $\forall t \in]a,b[\quad |f'(t)| \leq M$. Alors par le théorème des accroissements finis, f est M lipschitzienne, donc uniformément continue.

(ii) il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. f' soit bornée sur $]a, a+\alpha[$. Par la partie (i) f se prolonge par continuité en $\tilde{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ t.q.

$$\forall t \in]a, a+\eta[\quad |f'(t) - l| < \varepsilon$$

Donc par le théorème de accroissements finis

$$\forall x, y \in]a, a+\eta[\quad |f(x) - lx - (f(y) - ly)| \leq \varepsilon |x-y|$$

i.e.

$$|f(x) - f(y) - l(x-y)| \leq \varepsilon |x-y|$$

donc en laissant tendre x vers a

$$\forall y \in]a, a+\eta[\quad |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a) - l(x-a)| \leq \varepsilon |x-a|$$

d'où $\forall x \in]a, a+\eta[$

$$\left| \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)}{x-a} - l \right| \leq \varepsilon$$

ce qui prouve que $\tilde{f}$ est dérivable en a de dérivée l. $\square$

2.2. Complétude des espaces d'applications linéaires

Théorème

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ des espaces vectoriels normés. On suppose que F est complet. Alors l'espace des fonctions linéaires continues $\mathcal{L}_c(E, F)$ est complet pour $|||.|||$.

Preuve

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathcal{L}_c(E,F)$.

Pour tout $x \in E$ et tous $p, q \in \mathbb{N}$, on a

$\|u_p(x) - u_q(x)\|_F \leq |||u_p - u_q|||\,\|x\|_E$

donc $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Comme F est complet, elle converge

$$u : \begin{array}{l} E \to F \\ x \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) \end{array}$$

- u est linéaire

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in E$

$u(\lambda x + \mu y) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y).$

- Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $N \in \mathbb{N}$ t.q.

$\forall p, q \in \mathbb{N} \quad p \geq N$ et $q \geq N \quad |||u_p - u_q||| < \varepsilon/2.$

Alors $\forall q \in \mathbb{N}, q \geq N \quad \|u(x) - u_q(x)\|_F \leq \varepsilon/2 \, \|x\|_E$

Donc

. $\forall x \in E \qquad \|u(x)\|_F \leq (|||u_N||| + \varepsilon/2) \, \|x\|_E$

ce qui montre que u est continue et $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$.

. $\forall q \in \mathbb{N} \quad q \geq N \quad |||u - u_q||| < \varepsilon$

donc $\quad u_n \to u, \quad n \to \infty$. $\square$

2.3. Les formes linéaires

Théorème

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une application linéaire. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) φ est continue

(ii) $H = \ker(\varphi)$ est un fermé de E.

Si elles sont vérifiées alors

$$\forall x \in E \quad |||\varphi||| \, d(x, H) = |\varphi(x)| \qquad (*)$$

Preuve

(i) ⇒ (ii) $\quad \operatorname{Ker} \varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$

(ii) ⇒ (i) $\quad$ Si $\varphi = 0$ c'est vrai. Sinon soit $a \in E \setminus H$ alors $d(a, H) > 0$ (car H est fermé).

Si $x \notin H$ on a $\varphi(x) \neq 0$.

$$\varphi\left(a - \frac{\varphi(a)}{\varphi(x)} x\right) = 0, \text{ donc } a - \frac{\varphi(a)}{\varphi(x)} x \in H$$

donc $\quad d(a, H) \leq \left\| \frac{\varphi(a)}{\varphi(x)} x \right\| = \frac{|\varphi(a)|}{|\varphi(x)|} \|x\|$

donc
$$|\varphi(x)| \leq \frac{|\varphi(a)|}{d(a, H)} \|x\|$$

donc φ est continue et
$$|||\varphi||| \, d(a, H) \leq |\varphi(a)|.$$

Mais si $x \in H$

$|\varphi(a)| = |\varphi(a) - \varphi(x)| \leq |||\varphi||| \, \|a - x\|$

donc $\quad |\varphi(a)| \leq |||\varphi||| \inf\limits_{x \in H} \|a - x\| = |||\varphi||| \, d(a, H)$,

d'où (*) pour $a \notin H$.

(*) est vrai pour $a \in H$. $\quad \square$

Com 27

220

Cours 18 **Exemple**

$\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|.\|_2$.

Pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ on a

$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \langle \underline{a}, \underline{x} \rangle \leq \|\underline{a}\|_2 \, \|x\|_2$

avec égalité si $\underline{a}$ et $\underline{x}$ sont colinéaires donc la forme linéaire

$$\ell_{\underline{a}} : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \underline{x} \longmapsto (\underline{a}, \underline{x}) \end{array}$$

est continue et

$$|||\ell_{\underline{a}}||| = \|\underline{a}\|_2.$$

Soit $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0\}$.

alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad d(x, H) = \frac{|\langle a, x \rangle|}{\|a\|_2} = \frac{|\sum_{i=1}^n a_i x_i|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}}.$$

Rem

$\mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$ est toujours complet pour $|||.|||$.

Théorème (de représentation de Riesz)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert (en particulier complet)

L'application

$$J : \begin{array}{l} E \to \mathcal{L}_c(E, \mathbb{R}) \\ x \longmapsto (y \longmapsto \langle x, y \rangle) \end{array}$$

est une isométrie, c.a.d. elle vérifie les conditions suivantes :

(i) J est linéaire

(ii) $\forall x \in E \quad |||J(x)||| = \|x\|$

(iii) J est bijective

Preuve

(i) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire, donc J est linéaire

(ii) Par Cauchy - Schwarz

$\forall x, y \in E \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$

avec égalité si x et y sont colinéaires.

Donc $\forall x \in E \quad |||J(x)||| = \|x\|$

(cela est également valide si $x = 0$).

(iii) $J(x) = 0 \Rightarrow \|x\| = |||J(x)||| = 0 \Rightarrow x = 0$.

donc J est injective.

Montrons qu'elle est surjective (comme en dimension finie).

222

Soit $\varphi \in \cancel{\mathcal{L}_c(E,\mathbb{R})}\ \mathcal{L}_c(E,\mathbb{K})$. Si $\varphi = 0$,

$\varphi = J(0)$. Sinon posons $H = \ker(\varphi)$.

$H \subsetneq E$ est un sous espace fermé, donc H est complet.

Soit $\Pi : E \to H$ la projection orthogonale sur H.

Soit $x \in E \setminus H$ et $y = \dfrac{x - \Pi(x)}{\|x - \Pi(x)\|^2}\,\varphi(x - \Pi(x))$

On a par le théorème de la projection

$\forall z \in H \quad \langle x - \Pi(x), z \rangle = 0$

c-à-d. $\langle y, z \rangle = 0$. ~~et~~ et $\varphi(y) = \|y\|^2$.

Soit $x \in E$, on a

$$\varphi\left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(y)}\, y\right) = 0$$

donc $\cancel{\langle y, x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(y)}\, y \rangle = 0}$

i.e. $\cancel{\langle y, x \rangle =}$

donc

$$\left\langle x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(y)}\, y, y \right\rangle = 0$$

i.e.

$$\langle x, y \rangle = \frac{\varphi(x)}{\varphi(y)}\, \|y\|^2 = \varphi(x),$$

donc $\varphi = J(y)$. □

NB. Si $\varphi = J(y)$ on a nécessairement $\|y\|^2 = \langle y, y \rangle = \varphi(y)$ (cours 28)
et $\forall z \in H \quad \langle y, z \rangle = 0$

Annexe

Théorème des accroissements finis

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$
des applications dérivables t.q.
$\forall x \in [a,b] \qquad |f'(x)| \leq g'(x)$
alors $\qquad |f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$

Preuve

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi_\varepsilon : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$t \longmapsto |f(t) - f(a)| - g(t) + g(a) - \varepsilon(t-a)$$

Soit $J_\varepsilon = \{ t \in [a,b] \quad \varphi_\varepsilon(t) \leq \varepsilon \}$

- $a \in J_\varepsilon$ donc $J_\varepsilon \neq \emptyset$
- J_ε est fermé
- Soit $c = \sup(J_\varepsilon)$
- Si $b < c$ il reste $t > c$ t.q.

$$\left| \frac{f(t) - f(c)}{t - c} \right| \leq |f'(c)| + \varepsilon/2$$

$$\leq g'(c) + \varepsilon/2$$

$$\leq \frac{g(t) - g(c)}{t - c} + \varepsilon$$

~~220~~

224 donc $|f(t) - f(c)| \leq g(t) - g(c) + \varepsilon(t-c)$

donc $|f(c) - f(a)| \leq g(c) - g(a) + \varepsilon(c-a) + \varepsilon$

on obtient $t \in J_\varepsilon$ absurde !, donc $c = b$. $\square$