Chapitre 3

Topologie des espaces vectoriels normés

1 Parties ouvertes, parties fermées

1-1 Espaces topologiques

Définition

- Soit X un ensemble. On appelle topologie sur X un ensemble $\mathcal{U}$ de parties de X t.q.

(i) $\emptyset \in \mathcal{U}$ et $X \in \mathcal{U}$

(ii) $\forall U, V \in \mathcal{U} \quad U \cap V \in \mathcal{U}$

(iii) $\forall I \quad \forall (U_i)_{i \in I} \in \mathcal{U}^I \quad \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{U}$.

Les éléments de $\mathcal{U}$ sont appelés les ouverts de la topologie $\mathcal{U}$ (ou de X si aucune ambiguïté n'est à craindre sur $\mathcal{U}$).

- Un espace topologique est un couple $(X, \mathcal{U})$ où $\mathcal{U}$ est une topologie sur X.

NB

Par récurrence, on déduit de (ii) que si $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$, $U_1 \cap \dots \cap U_n \in \mathcal{U}$.

Exemple fondamental (à maîtriser !) : topologie des espaces vectoriels normés

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Une partie U de E est dite ouverte (pour $\|\cdot\|$) ssi :

$\forall x \in U \quad \exists r \in \mathbb{R}_+^* \quad B(x, r) \subset U$

Prop / Déf

$\mathcal{U}_{\|.\|} = \{$ parties ouverts de E pour $\|.\|\}$ est une topologie sur E, appelée <u>la topologie définie par $\|.\|$</u>.

Preuve

(i) $\emptyset \in \mathcal{U}_{\|.\|}$ et $E \in \mathcal{U}_{\|.\|}$ par définition des ouverts

(ii) Soient $U, V \in \mathcal{U}_{\|.\|}$. Soit $x \in U \cap V$

Soit $r_1 \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $B(x, r_1) \subset U$

Soit $r_2 \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $B(x, r_2) \subset V$

Soit $r := \min(r_1, r_2) \in \mathbb{R}_+^*$

$$B(x, r) \subset U \cap V.$$

Donc $U \cap V \in \mathcal{U}_{\|.\|}$.

(iii) Soit I un ensemble. Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{U}_{\|.\|}$. Soit $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$.

Il existe i t.q. $x \in U_i$

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $B(x, r) \subset U_i$

On a $B(x,r) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$

Donc $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{U}_{\|.\|}$. $\square$

Ex 2

Soit $(X, \mathcal{U})$ un espace topologique. Soit $A \subset X$

Notons $\mathcal{U}_A = \{ U \cap A,\ U \in \mathcal{U} \}$

(i.e. $V \in \mathcal{U}_A \iff \exists U \in \mathcal{U} \quad V = A \cap U$)

Alors $\mathcal{U}_A$ est une topologie sur A appelée topologie induite sur A par $\mathcal{U}$. On dit que $(A, \mathcal{U}_A)$ est un sous-espace topologique de X.

En effet :

(i) $\emptyset = \emptyset \cap A \in \mathcal{U}_A$, $A = X \cap A \in \mathcal{U}_A$

(ii) Si $U, V \in \mathcal{U}_A$

$$(U \cap A) \cap (V \cap A) = (U \cap V) \cap A \in \mathcal{U}_A$$

(iii) Soit I un ensemble. Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{U}$

$$\bigcup_{i \in I} U_i \cap A = \left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) \cap A \in \mathcal{U}_A.$$

Attention : En général un ouvert de A n'est pas un ouvert de X !

Ex

Si $A \subset X$ n'est pas un ouvert A est un ouvert de A (par définition) mais n'est pas un ouvert de X !

NB

Si A est un ouvert de X

Alors $\forall U \in \mathcal{U}$ $U \cap A$ est un ouvert de X donc dans ce cas tout ouvert de A est un ouvert de X.

Définition

Soit $(X, \mathcal{U})$ un espace topologique. On appelle fermé de la topologie $\mathcal{U}$ (ou de X) toute partie dont le complémentaire dans X est un ouvert de X.

Appellation

Soit $(X, \mathcal{U})$ un espace topologique. Notons $\mathcal{F} = \{$ fermés de $X\}$.

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$ et $X \in \mathcal{F}$

(ii) $\forall F, G \in \mathcal{F}$, $F \cup G \in \mathcal{F}$

(iii) $\forall I$ $\forall (F_i)_{i\in I} \in \mathcal{F}^I$ $\bigcap_{i \in I} F_i \in \mathcal{F}$.

Preuve

(i) $\emptyset = X \setminus X$, $X = X \setminus \emptyset$

(ii) $\forall\, U, V \in \mathcal{U}$ $(X \setminus U) \cup (X \setminus V) \overset{\text{exo}}{=} X \setminus \underbrace{(U \cap V)}_{\in\, \mathcal{U}}$

(iii) Soit I un ensemble. Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{U}$.

$$\bigcap_{i\in I} (X \setminus U_i) = X \setminus \left(\bigcup_{i \in I} U_i\right)$$

[En effet soit $x \in X$

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{i\in I} (X\setminus U_i) &\Leftrightarrow \forall i \in I \quad x \in X \setminus U_i \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I \quad x \notin U_i \\ &\Leftrightarrow \neg\, (\exists i \quad x \in U_i) \\ &\Leftrightarrow x \notin \bigcup_{i\in I} U_i . \end{aligned}$$ $\square$

~~NB~~

~~Si A est un fermé de X alors tout fermé de A est un fermé de X.~~

Proposition

Soit $(X, \mathcal{U})$ un espace topologique et $(A, \mathcal{U}_A)$ un sous-espace topologique de X. Les fermés de A sont les ensembles de la forme $F \cap A$ avec F fermé dans X.

Preuve

Soit B une partie de A. Si B est fermé dans A, alors $A \setminus B$ est ouvert dans A et il existe une partie U de X, ouverte dans X, t.q. $A \setminus B = A \cap U$. Donc $B = A \cap (X \setminus U)$ et $X \setminus U$ est fermé dans X. Réciproquement s'il existe une partie F fermée de X t.q. $B = A \cap F$, alors $A \setminus B = A \cap (X \setminus F)$ est ouvert dans A, donc B est fermée dans A. $\square$

NB

Si A est un fermé de X alors tout fermé de A est un fermé de X.

[En effet si $F = A \setminus A \cap U$ avec $U \in \mathcal{U}$ $\Rightarrow F = \underbrace{A}_{\text{fré de } X} \cap \underbrace{(X \setminus U)}_{\text{fré de } X}$ fré dans X]

Ex 1

Soit $(E, \|.\|)$ un evn. Soit $x \in E$, $r \in \mathbb{R}_+^*$.

- $B(x,r)$ est ouverte :

$\forall y \in B(x,r)$ $\quad B(y, r - \|y - x\|) \subset B(x,r)$.

- $\overline{B}(x,r)$ est fermée.

Soit $y \notin \overline{B}(x,r) = \{ z \in E : \|z - x\| \le r \}$

(17) On a donc $\|y - x\| > r$

Pour tout $z \in \mathcal{B}(y, \|y-x\| - r)$

$\|z - x\| \geq \big| \|z - y\| - \|y - x\| \big|$

$\geq \|y - x\| - \|z - y\|$

$> \|y - x\| - (\|y - x\| - r) = r$

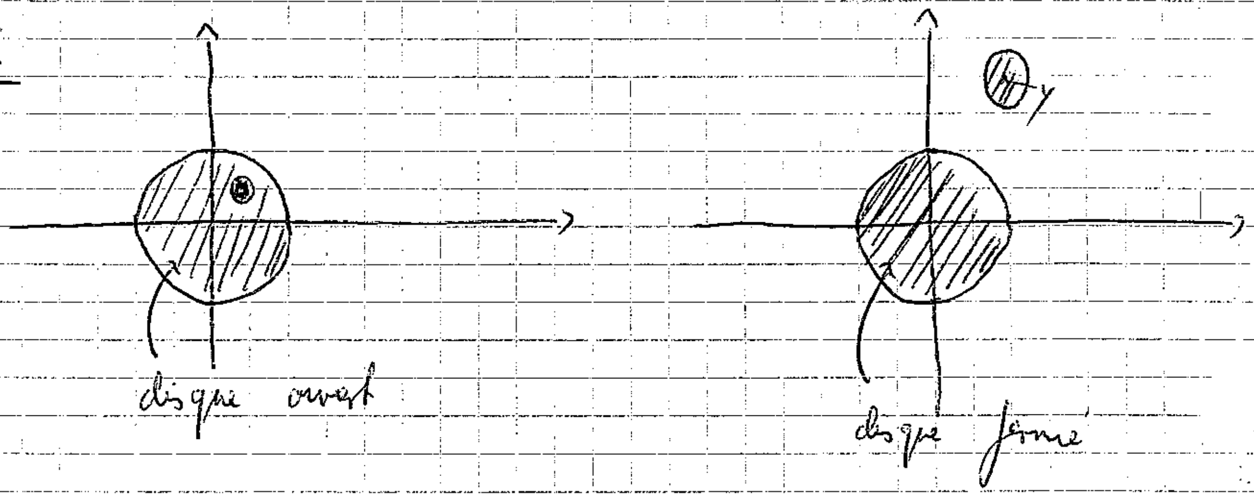
$z \in \mathcal{B}(y, \|y - x\| - r)$

donc $\mathcal{B}(y, \|y-x\| - r) \cap \overline{\mathcal{B}}(x, r) = \emptyset$

i.e. $\mathcal{B}(y, \|y-x\| - r) \subset E \setminus \overline{\mathcal{B}}(x,r)$

donc $E \setminus \overline{\mathcal{B}}(x,r)$ est ouvert donc $\overline{\mathcal{B}}(x,r)$ est fermé !

Dessin



Application

Un ouvert de $(E, \|.\|)$ est une réunion (éventuellement infinie) de boules ouvertes.

[En effet : . Une boule ouverte étant ouverte une réunion de boules ouvertes est ouverte

. Inversement si U est ouvert. Pour tout x de U il existe $\eta_x \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $\mathcal{B}(x, \eta_x) \subset U$

donc $U = \bigcup_{x \in U} \mathcal{B}(x, \eta_x)$ réunion de boules ouvertes

Proposition

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $A \subset E$ et soit $B \subset A$. Alors B est un ouvert de A ssi:
$\forall x \in B \quad \exists y \in \mathbb{R}_+^\times \quad B(x,y) \cap A \subset B$.

Preuve

$\Rightarrow$ Si B ouvert de A il existe un ouvert U de E t.q. $B = A \cap U$. Soit $x \in B \subset U$. Il existe $y \in \mathbb{R}_+^\times$ t.q. $B(x,y) \subset U$ donc $B(x,y) \cap A \subset U \cap A = B$.

$\Leftarrow$ On suppose que
$\forall x \in B \quad \exists y \in \mathbb{R}_+^\times \quad B(x,y) \cap A \subset B$. Pour tout x de B il existe $y_x \in \mathbb{R}_+^\times$ t.q. $B(x, y_x) \cap A \subset B$
Soit
$$U = \bigcup_{x \in B} B(x, y_x)$$ ouvert de E (réunion de boules ouvertes)

$\forall x \in B \quad x \in B(x, y_x) \cap A \subset B$

donc
$$B \subset \bigcup_{x \in B} (B(x,y_x) \cap A) \subset B$$
donc
$$B = \bigcup_{x \in B} (B(x,y_x) \cap A) = U \cap A$$
donc B est un ouvert de A. $\square$

Ex2

$\mathbb{R}$ muni de la topologie définie par $|.|$.
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$
$]a,b[= B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$ ouvert.
$[a,b] = \overline{B}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$ fermé

- Si $a \in \mathbb{R}$ $]a, \infty[$ (resp. $]-\infty, a[$) sont des ouverts de $\mathbb{R}$.

  En effet si $x > a$ $B(x, |x-a|) \subset]a, +\infty[$.

  On raisonne de même pour $]-\infty, a[$

- Si $a \in \mathbb{R}$ $[a, +\infty[$ (resp. $]-\infty, a]$) sont des fermés de $\mathbb{R}$

  En effet $\mathbb{R} \setminus [a, +\infty[=]-\infty, a[$ ouvert de $\mathbb{R}$

- $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$ est à la fois ouvert et fermé !
- $[0, 1[$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$.

  Il n'est pas ouvert :

  $0 \in [0, 1[$ et $\forall y \in \mathbb{R}_+^*$ $B(0, y)$ ~~$\not\subset$~~ $\not\subset [0, 1[$

  Il n'est pas fermé !

cours 15 $1 \in \mathbb{R} \setminus [0, 1[$ et $\forall y \in \mathbb{R}_+^*$ $B(1, y) \not\subset \mathbb{R} \setminus [0, 1[$.

<u>Application</u>

Un ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion (éventuellement infinie) <u>d'intervalles ouverts</u>.

<u>Attention</u> : Une intersection infinie d'ouverts n'a aucune raison d'être un ouvert !

<u>Ex</u> : $$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{]-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}[}_{\text{ouvert}} = \overset{\text{ex}}{\{0\}} \text{ pas ouvert.}$$

Une réunion infinie de fermés n'a aucune raison d'être un fermé !

Ex : $$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{[0, 1 - \frac{1}{n+1}]}_{\text{fermé}} = [0, 1[\text{ ni ouvert, ni fermé !!}$$

En effet $\forall n \in \mathbb{N} \quad [0, 1 - \frac{1}{n+1}] \subset [0, 1[$

donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, 1 - \frac{1}{n+1}] \subset [0, 1[$

Si $x \in [0, 1[$ on a $1 - x > 0$ donc il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $\frac{1}{n+1} < 1 - x$ donc $x \in [0, 1 - \frac{1}{n+1}]$.

Donc
$$[0, 1[\subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, 1 - \frac{1}{n+1}].$$ □

~~3.2~~.1.2 Suites

Théorème

Soit $(E, \|.\|)$ un evn. Soit $A \subset E$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) A est fermé

(ii) Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A convergente, $\lim_{n \to \infty} u_n \in A$.

~~(iii) Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A et toute valeur d'adhérence~~ ℓ de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\ell \in A$.

Preuve

$(i) \Rightarrow (ii)$

On suppose A fermé. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A, convergente (dans E).

$\ell = \lim_{n \to \infty} u_n$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\ell \notin A$. $E \setminus A$ est ouvert donc il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $B(\ell, \eta) \subset E \setminus A$. Par définition de la convergence il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q. $u_N \in B(\ell, \eta) \subset E \setminus A$ cela contredit $u_N \in A$ ↯. Donc $\ell \in A$.

121

$\neg(i) \Rightarrow \neg(ii)$

On suppose que A n'est pas fermé, i.e. $E \setminus A$ n'est pas ouvert. Donc il existe $x \in E \setminus A$
$\forall y \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad B(x,y) \not\subset E \setminus A$, c.a.d.
$\forall y \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad B(x,y) \cap A \neq \emptyset$.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $u_n \in A$ t.q. $\|x - u_n\| < \frac{1}{n+1}$. u_n est une suite d'éléments de A t.q. $\quad u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x \notin A$. $\square$

<u>Exemple</u>

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$

$$\|\cdot\|_\infty : \begin{array}{ccl} B([a,b],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ f & \longmapsto & \|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \end{array}$$

algèbre (exo) des fonctions bornées sur $[a,b]$.

$C([a,b],\mathbb{R}) \subset B([a,b],\mathbb{R})$.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $C([a,b],\mathbb{R})$ qui converge pour $\|\cdot\|_\infty$ dans $B([a,b],\mathbb{R})$.

Notons $f = \lim_{n \to \infty} f_n$; f_n converge <u>uniformément</u> vers f. Donc f est continue
Donc

$C([a,b],\mathbb{R})$ est fermé dans $B([a,b],\mathbb{R})$.

Proposition

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Soit $\ell \in E$.

1. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$

(ii) Pour tout ouvert U de E contenant ℓ il existe $N\in\mathbb{N}$ t.q. $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq N \quad u_n\in U$.

2. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) ℓ est valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(ii) Pour tout ouvert U de E contenant ℓ $\{n\in\mathbb{N} : u_n\in U\}$ est infini

Preuve

1. $\Rightarrow$) Soit U un ouvert de E contenant ℓ. Soit $\eta\in\mathbb{R}_+^*$ t.q. $B(\ell,\eta)\subset U$. Soit $N\in\mathbb{N}$ t.q. $\forall n\in\mathbb{N}$ $n\geq N$ $\quad u_n\in B(\ell,\eta)$

Donc
$$\forall n\in\mathbb{N} \quad n\geq N \quad u_n\in U$$

$\Leftarrow$ Il suffit de remarquer que pour tout $\eta\in\mathbb{R}_+^*$ $B(\ell,\eta)$ est un ouvert qui contient ℓ.

2. On raisonne de même en utilisant le fait que ℓ est valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ssi $\{n\in\mathbb{N} : u_n\in B(\ell,\varepsilon)\}$ est infini pour tout $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$.

Conclusion

La notion de convergence ou de valeur d'adhérence d'une suite ne dépendent que de la topologie définie

(12.3)

par $\|.\|$ (le sont des notions topologiques).

Définition

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace topologique X converge vers $\ell \in X$ si pour tout ouvert U contenant ℓ il existe $N\in\mathbb{N}$ t.q. $\forall n\in\mathbb{N}$ $n\geq N$ $u_n \in U$.

2.3.1.3 Continuité

Théorème

Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ des evn. Soit $A\subset E$ et $B\subset F$ et soit $f : A \to B$ une application. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue

(ii) Pour tout ouvert V de B $f^{-1}(V)$ est un ouvert de A^*

(iii) Pour tout fermé G de B $f^{-1}(B)$ est un fermé de A^*

* : pour la topologie induite !

Preuve

(i) ⇒ (ii)

On suppose f continue. Soit V un ouvert de F.

Montrons que $f^{-1}(\underbrace{V\cap B}_{\text{ouvert de } B \text{ arbitraire}})$ est un ouvert de A.

Soit $x \in f^{-1}(V \cap B)$, $f(x) \in V$.

Il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $\mathcal{B}_F(f(x), \varepsilon) \subset V$

Il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $\mathcal{B}_E(x, \eta) \cap A \subset f^{-1}(\mathcal{B}_F(f(x), \varepsilon))$

(Définition ~~II.8.1~~ II.8.1)

Donc $\forall x \in f^{-1}(V \cap B)$ $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*$ $\mathcal{B}_E(x, \eta) \cap A \subset f^{-1}(V \cap B)$

Il suit de la proposition III.1.3 que $f^{-1}(V \cap B)$ est un ouvert de A.

<u>(ii) ⇒ (i)</u>

Soit $x \in A$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $\mathcal{B}(f(x), \varepsilon) \cap B$ est un ouvert de B. Donc $f^{-1}(\mathcal{B}(f(x), \varepsilon) \cap B)$ est un ouvert de A contenant x. Donc il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tq. $\mathcal{B}(x, \eta) \cap A \subset f^{-1}(\mathcal{B}(f(x), \varepsilon) \cap B)$.

Donc f est continue.

(ii) ⇔ (iii) Soit $U \subset B$ un ouvert de B

$f^{-1}(U)$ ouvert <u>de A</u>

$\Leftrightarrow$ $A \setminus f^{-1}(U)$ <u>fermé de A</u>

$$A \setminus f^{-1}(U) = f^{-1}(B \setminus U)$$

$\Leftrightarrow$ $f^{-1}(B \setminus U)$ fermé de A.

Donc tous les fermés de B étant de la forme $B \setminus U$

$\forall U$ ouvert de B $f^{-1}(U)$ ouvert de A

$\Leftrightarrow$ $\forall F$ fermé de B $f^{-1}(F)$ fermé de A. $\square$

125

Définition

Soit X et Y des espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application de X dans Y. L'application f est dite continue si, pour tout ouvert U de Y, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X.

Corollaire

Soit $(E, \|.\|)$ et $(F, \|.\|_F)$ des evn.
~~Soit U un~~
Soit ~~U~~ A une partie de E et $f : A \to F$ une application

1. Si A est ouvert de E les assertions suivantes sont équivalentes :
   - (i) f est continue
   - (ii) $\forall V \in \mathcal{U}_{\|.\|_F}$, $f^{-1}(V)$ est un ouvert de E.
2. Si A est un fermé de E, les assertions suivantes sont équivalentes :
   - (i) f est continue
   - (ii) $\forall H$ fermé de F, $f^{-1}(H)$ est un fermé de E.

Preuve

1. Si $A \subset E$ ouvert, alors tout ouvert de A est un ouvert de E
2. Si $A \subset E$ fermé alors tout fermé de A est un fermé de E. $\square$

Corollaire du Corollaire

Soit E un espace vectoriel. Soit $\|.\|$ et $\|.\|'$ des normes sur E. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\|.\|$ et $\|.\|'$ sont équivalentes

(ii) $\|.\|$ et $\|.\|'$ définissent la même topologie.

Preuve

$id_E : (E, \|.\|) \longrightarrow (E, \|.\|')$ est continue ssi $\mathcal{U}_{\|.\|'} \subset \mathcal{U}_{\|.\|}$.

C'est un homéomorphisme ssi $\mathcal{U}_{\|.\|'} = \mathcal{U}_{\|.\|}$ et on a vu que les normes sont équivalentes ssi id_E est un homéomorphisme (Proposition II.8.4.1).

Ex

• Soit $ev_0 : \begin{array}{rcl} C([0,1], \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array}$ forme linéaire

On munit $C([0,1], \mathbb{R})$ de $\|.\|_\infty$

et $\mathbb{R}$ de $|.|$

$\forall f, g \in C([0,1], \mathbb{R}) \quad |f(0) - g(0)| \leq \|f - g\|_\infty$

donc ev_0 est continue et $\|ev_0\| \leq 1$.

$ev_0^{-1}([2,3]) = \{ f \in C([0,1], \mathbb{R}) : f(0) \in [2,3] \}$

est un fermé de $(C([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$

Soit $(E, \|.\|)$ un evn. Soit $A \subset E$

$$\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & d(x,A) \end{array} \quad \text{est continue.}$$

Donc si $r \in \mathbb{R}_+$

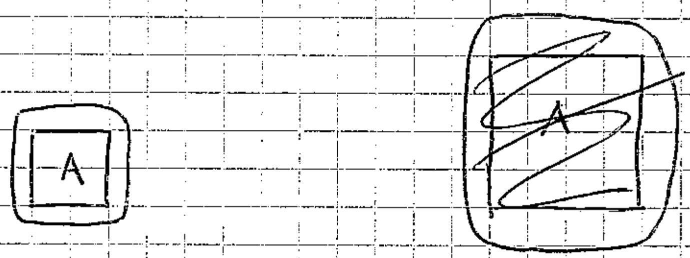
$$\{y \in E : d(y,A) \leq r\}$$

est un fermé de E

$$\{y \in E : d(y,A) < r\}$$

est un ouvert de E appelé r - voisinage de A
(cela généralise le cas des boules).

<u>Dessin</u> $(\mathbb{R}^2, \|.\|_2)$



$$\{y \in \mathbb{R}^2 : d(y,A) \leq 1\}$$

<u>Cas particulier</u>

$$A \subset \underbrace{\{y \in A : d(y,A) = 0\}}_{\text{fermé de } E \, !}$$

<u>cours 16</u>

cours

1.4 Intérieur et Adhérence

Propriété / Définition

Soit $(E, \|.\|)$ un evn et soit A une partie de E. On appelle intérieur de A et on note A° la partie suivante de A

$$\boxed{A^\circ = \bigcup_{\{U \in \mathcal{U}_{\|.\|} ; U \subset A\}} U}$$

$$= \{ x \in A : \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \; B(x, \varepsilon) \subset A \}$$

C'est un ouvert de E contenu dans A et tout ouvert de E contenu dans A est contenu dans A° (A° est le plus grand ouvert de E contenu dans A).

Preuve

- Posons $A^\circ = \bigcup_{\{U \in \mathcal{U}_{\|.\|} : U \subset A\}} U$

Si $x \in A^\circ$ il existe $U \in \mathcal{U}_{\|.\|}$ t.q. $x \in U \subset A$

Par définition des ouverts $\exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $B(x, \varepsilon) \subset U \subset A$

Inversement si $x \in A$ est t.q. $\exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ avec $x \in \underbrace{B(x, \varepsilon)}_{\text{ouvert de } E} \subset A$

alors $x \in \bigcup_{\{U \in \mathcal{U}_{\|.\|} : U \subset A\}} U$

- A° est une réunion d'ouverts de E. C'est donc un ouvert de E.

- Soit U un ouvert de E contenu dans A. Par définition $U \subset A^\circ$

$\square$

NB A est ouvert ssi $A = \mathring{A}$.

Ex

- $\overset{\circ}{\widehat{[0,1[}} \supset]0,1[$ puisque $]0,1[$ est ouvert et contenu dans $[0,1[$

  Donc $\overset{\circ}{\widehat{[0,1[}} =]0,1[$ ou $\underbrace{[0,1[}_{\text{pas ouvert dans } \mathbb{R}}$

- Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé non nul.

  Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$, soit $x \in E$

$$B(x,r) \subset \overline{B}(x,r)$$

donc $\overset{\circ}{\widehat{\overline{B}(x,r)}} \supset B(x,r)$

Soit $y \in S(x,r) = \overline{B}(x,r) \setminus B(x,r)$

Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\|\underbrace{x + \left(1 + \frac{\varepsilon}{\|y-x\|+1}\right)(y-x)}_{z} - y\|$$

$$= \frac{\varepsilon}{\|y-x\|+1} \|y-x\| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \|z-x\| > r$$

donc $z \in B(y, \varepsilon) \setminus \overline{B}(x,r)$

donc $\cancel{z}\ y \notin \overset{\circ}{\widehat{\overline{B}(x,r)}}$

donc $\overset{\circ}{\widehat{\overline{B}(x,r)}} = B(x,r)$

Propriété / Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et soit $A \subset E$. On appelle adhérence de A et on note $\overline{A}$ la partie suivante de E

$$\boxed{\overline{A} = \bigcap_{\{F \text{ fermé de } E,\, A \subset F\}} F}$$

$$= \{x \in E : \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \; B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset\}$$

$$[= \{x \in E : d(x,A) = 0\} \quad \text{si } A \neq \emptyset]$$

$$= E \setminus (\overset{\circ}{\overbrace{E \setminus A}})$$

C'est un fermé de E contenant A et tout fermé de E qui contient A contient $\overline{A}$ ($\overline{A}$ est le plus petit fermé de E contenant A)

Preuve

• Posons $\overline{A} = \bigcap_{\{F \text{ fermé de } E,\, A \subset F\}} F$

On a $E \setminus \overline{A} = E \setminus \bigcap_{\{F \text{ fermé de } E\,:\, A \subset F\}} F$

$$= \bigcup_{\{F \text{ fermé de } E,\, A \subset F\}} E \setminus F$$

$$= \bigcup_{\{U \text{ ouvert de } E,\, U \subset E \setminus A\}} U \quad = \overset{\circ}{\overbrace{E \setminus A}},$$

d'où la dernière égalité. Par la propriété de l'intérieur

(131)

$$E \setminus \bar{A} = \{x \in E : \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad B(x,\varepsilon) \subset E \setminus A\}$$

d'où on déduit le critère

$$\bar{A} = \{x \in E : \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset\},$$

d'où la première égalité.

Soit $A \neq \emptyset$. On a pour tout x de E

$$d(x, A) = 0 \iff \inf_{y \in A} \|y - x\| = 0$$

$$\iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists y \in A \quad \|y - x\| < \varepsilon$$

$$\iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

- $\bar{A}$ est une intersection de fermés, c'est donc un fermé et si F est un fermé de E contenant A alors $\bar{A} \subset F$ par définition.

NB

A est fermée ssi $A = \bar{A}$.

Exemples

- Dans $\mathbb{R}$

$$[0,1[\ \subset \overline{[0,1[} \subset \underbrace{[0,1]}_{\text{fermé contenant } [0,1[}$$

donc $\overline{[0,1[} = [0,1[$ ou $[0,1]$

Comme $[0,1[$ n'est pas fermé $\overline{[0,1[} = [0,1]$.

- Soit $(E, \|.\|)$ un evn. Soit $x \in E$, $r \in \mathbb{R}_+^*$

$$B(x,r) \subset \underbrace{\bar{B}(x,r)}_{\text{fermé}}$$

Donc $\overline{B(x,r)} \subset \bar{B}(x,r)$

Soit $y \in \bar{B}(x,r)$

Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad x + \frac{1}{1+\varepsilon}(\cancel{y}-\cancel{x}) \in B(x,r)$

et

$$\|y - (x + \frac{1}{1+\varepsilon}(\cancel{y}-\cancel{x}))\| = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\|y-x\| \to 0,\ \varepsilon \to 0$$

donc
$$d(y, B(x,r)) = 0 \text{ et } y \in \overline{B(x,r)}$$

Donc
$$\overline{B(x,r)} = \bar{B}(x,r)$$

<u>Proposition</u>

Soit $(E, \|.\|)$ un evn. Soient $A \subset B \subset E$. Alors
A est dense dans B ssi $B \subset \bar{A}$.

<u>Preuve</u>

A est dense dans B

ssi $\forall b \in B \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad B(b,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

ssi $\forall b \in B \quad b \in \bar{A}$

ssi $B \subset \bar{A}$. $\square$

<u>Exemple</u>

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, donc $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, donc $\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Donc $\mathbb{Q}^\circ\ \cancel{\mathbb{Q}^c} = \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbb{R}\setminus\mathbb{R} = \emptyset$

Donc
$$\mathbb{Q}^\circ = \emptyset \quad \text{et} \quad \bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

De même $\cancel{\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}^c}$ $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^\circ = \emptyset$ et $\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

<u>Corollaire</u>

Soit $(E, \|.\|)$ un evn. Soit $A \subset E$ et $x \in E$.
Les assertions suivantes sont équivalentes

(i) $x \in \bar{A}$

(ii) il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A t.q. $u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$

Preuve

. Par la proposition A est dense dans $\bar{A}$ donc (i) $\Rightarrow$ (ii).

. Soit B l'ensemble des x de E vérifiant (ii). Par définition A est dense dans B donc $B \subset \bar{A}$. Donc (ii) $\Rightarrow$ (i). $\square$

Proposition

Soit $(E, \|.\|)$ un evn. Soit A, B des parties de E.
Alors

i) Si $A \subset B$, alors $A^\circ \subset B^\circ$ et $\bar{A} \subset \bar{B}$

ii) $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = A^\circ \cap B^\circ$ et $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

iii) $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ et $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \supset A^\circ \cup B^\circ$

~~Attention : Dans iii) les inclusions inverses peuvent être fausses!~~

Preuve : Exo

i) A° est un ouvert de E contenu dans B, donc $A^\circ \subset B^\circ$

$\bar{A} \subset \bar{B}$ se montre de même

ii) $A^\circ \cap B^\circ \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$

↖ ouvert de E contenu dans $A \cap B$

et $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subset A^\circ$ et $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subset B^\circ$ par i),

donc $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subset A^\circ \cap B^\circ$

$\overline{A \cup B} \subset \underbrace{\bar{A} \cup \bar{B}}$

fermé contenant $A \cup B$

$\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ et $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$

Donc $$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

(ii) $\overline{A \cap B} \subset \underbrace{\overline{A} \cap \overline{B}}_{\text{fermé contenant } A \cap B}$

et $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \supset \underbrace{\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}}_{\text{ouvert contenu dans } A \cup B} \ \square$

Attention : Dans (ii) les inclusions inverses peuvent être fausses !

Exemple

- $\overline{\mathbb{Q} \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \overline{\emptyset} = \emptyset$

  $\overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

- $\overset{\circ}{\widehat{\mathbb{Q} \cup \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}} = \mathbb{R}$

  $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} \cup \overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}} = \emptyset$

Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. Soit $A \subset E$. La frontière de A est
$$\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$$

Exemple

- $\partial([0,1]) = [0,1] \setminus]0,1[= \{0,1\}$

- Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn.

  $\partial(B(x,r)) = \partial(\overline{B}(x,r)) = S(x,r)$

- Dans $\mathbb{R}$

  $\partial(\mathbb{Q}) = \partial(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}.$

1.8 Séparation des fermés

Théorème

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit F, G des fermés non vides de E t.q. $F \cap G = \emptyset$. Alors il existe $f : E \to \mathbb{R}$ continue t.q.

$$\begin{cases} (i) & f(E) \subset [0,1] \\ (ii) & \forall x \in E \quad x \in F \iff f(x) = 0 \\ (iii) & \forall x \in E \quad x \in G \iff f(x) = 1 \end{cases}$$

Preuve

Comme F est fermé

$$F = \bar{F} = \{x \in E : d(x, F) = 0\}.$$

De même :

$$G = \bar{G} = \{x \in E : d(x, G) = 0\}$$

Comme $F \cap G = \emptyset$,

$\forall x \in E \quad d(x, F) + d(x, G) \in \mathbb{R}_+^*$

On considère l'application

$$f : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{d(x, F)}{d(x, F) + d(x, G)} \end{array}$$

On a (i) puisque $\forall x \in E \quad d(x, F) \geq 0$ et $d(x, G) \geq 0$.

On a $f|_F = 0$ et $f|_G = 1$ et

Si $f(x) = 0$ alors $d(x, F) = 0$ donc $x \in F$

Si $f(x) = 1$ alors $d(x, G) = 0$ donc $x \in G$. $\square$

Cours 17

Corollaire

Soient $(E, \|.\|)$ un evn. Soient F, G des fermés de E t.q. $F \cap G = \emptyset$. Alors il existe des ouverts U et V de E t.q.

$$\begin{cases} (i) & U \cap V = \emptyset \\ (ii) & F \subset U \\ (iii) & G \subset V \end{cases}$$

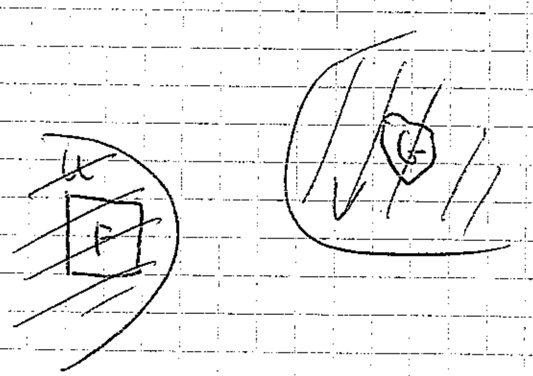
Preuve

On prend une application f vérifiant les conditions du théorème et on pose

$$U = f^{-1}(]-\infty, \tfrac{1}{3}[) \quad , \quad V = f^{-1}(]\tfrac{2}{3}, \infty[)$$

Ce sont des ouverts disjoints de E et $F \subset U$, $G \subset V$. □

Dessin



NB

On peut remplacer la condition (i) par la condition plus forte

$$(i') \quad \overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$$

(avec la construction qui précède

$$\overline{U} \subset f^{-1}(]-\infty, \tfrac{1}{3}])$$

$$\overline{V} \subset f^{-1}([\tfrac{2}{3}, \infty[) \qquad \text{donc } \overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset)$$

1.6 Adhérence et valeurs d'adhérence

Théorème

Soit $(E, \|.\|)$ un evn. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. Notons Λ l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors

$$\Lambda = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_m ; m\in\mathbb{N} \text{ et } m \geq n\}}$$

Preuve

ℓ est valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

ssi $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^\times \quad \{n\in\mathbb{N} ; u_n \in B(\ell, \varepsilon)\}$ est infini

ssi $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^\times \quad \forall n\in\mathbb{N} \ \exists m\in\mathbb{N}, m \geq n$ et $u_m \in B(\ell, \varepsilon)$

ssi $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^\times \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad \underline{B(\ell, \varepsilon) \cap \{u_m ; m\in}\mathbb{N} \text{ et } m\geq n\} \neq \emptyset$

ssi $\forall n \in\mathbb{N} \quad \ell \in \overline{\{u_m ; m\in\mathbb{N} \text{ et } m\geq n\}}$

ssi $\ell \in \Lambda$. $\square$

Corollaire

L'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un fermé de E.

2 Parties compactes d'un espace vectoriel normé

2-1. Définition

Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Une partie A de E est dite <u>compacte</u> ssi toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A possède une valeur d'adhérence dans A.

Propriétés

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn et soit A une partie compacte de E. Alors
a) A est bornée
b) A est fermée

Preuve

a) Raisonnons par l'absurde. Si A n'est pas bornée, pour tout $n\in\mathbb{N}$ il existe $u_n\in A$ t.q. $\|u_n\| \geqslant n$. Soit ℓ une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il existe $\varphi : \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante t.q.

$$u_{\varphi(n)} \longrightarrow \ell \qquad \text{d'où} \qquad \|u_{\varphi(n)}\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|\ell\|$$

Mais $\forall n\in\mathbb{N}$ $\varphi(n)\geqslant n$ donc $\forall n\in\mathbb{N}$ $\|u_{\varphi(n)}\|\geqslant n$

d'où $\|u_{\varphi(n)}\| \longrightarrow \infty$ $\lightning$.

b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de A. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ est l'unique valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \in A$. Par le Théorème III.1.2.1 A est fermée. □

139

Théorème

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn de dimension finie et soit $A \subset E$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est compacte

(ii) A est fermée et bornée

Preuve

Par la proposition ~~suivante~~ précédente, il suffit de montrer (ii) ⇒ (i)

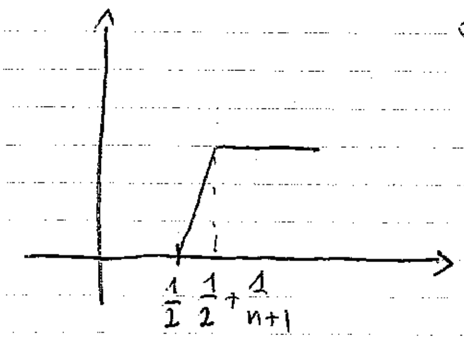
- Soit A une partie fermée et bornée de E. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A. Comme A est bornée $\{u_n : n\in\mathbb{N}\}$ est bornée. Par Bolzano-Weierstrass, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence $\ell\in E$. Il existe une suite strictement croissante $\varphi : \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ t.q. $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$

  Comme A est fermée et que $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_{\varphi(n)}\in A$, $\ell\in A$. □

Attention : Cette équivalence ne marche pas en dimension infinie !

Ex (déjà vu)

$n\in\mathbb{N}$



$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x\in[0,\frac{1}{2}] \\ (n+1)(x-\frac{1}{2}) & \text{si } x\in]\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}] \\ 1 & \text{si } x\in]\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1},1] \end{cases}$$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|f_n\|_\infty = 1.$

Mais $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de valeur d'adhérence (Ex II.5.

dans $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Donc

$\overline{B}_{(C([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)}(0,1)$ est un fermé borné de $(C([0,1]),\|\cdot\|_\infty)$,

mais n'est pas compacte !

<u>Exemples</u>

- Si $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$
  $[a,b]$ est un compact de $\mathbb{R}$
- Si $r \in \mathbb{R}_+^*$ et si $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$
  $\overline{B}_{\|\cdot\|}(0,r)$ et $S_{\|\cdot\|}(0,r)$ sont compactes.

<u>Remarque</u>

Si A est compact, A est fermé donc les fermés <u>de A</u> sont les fermés de E contenus dans A.

<u>Proposition</u>

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn, A un compact de E et F un fermé de A. Alors F est compact.

<u>Preuve</u>

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $F \subset A$. Car A est compacte $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence $\ell \in A$. Il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante t.q. $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$. Comme F est fermé et $u_{\varphi(n)} \in F$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ell \in F$. □

2.2. Caractérisation topologique des compacts

Théorème

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $A \subset E$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est compact

(ii) Pour toute famille $(U_i)_{i \in I}$ d'ouverts de E t.q. $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, il existe $J \subset I$, J fini t.q. $A \subset \bigcup_{i \in J} U_i$.

(iii) Pour toute famille $(F_i)_{i \in I}$ de fermés de E t.q. $A \cap \bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, il existe $J \subset I$, J fini t.q. $A \cap \bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset$

(iv) Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fermés t.q.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad F_{n+1} \subset F_n$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad F_n \cap A \neq \emptyset$

Alors $\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n\right) \cap A \neq \emptyset$.

Exemples

a) $]0,1[$ n'est pas compact.

$$]0,1[= \bigcup_{n\geq 1} \left]\tfrac{1}{n}, 1-\tfrac{1}{n}\right[$$ où les $]\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}[$ sont ouverts, et une réunion finie de tels ouverts ne recouvre pas $]0,1[$.

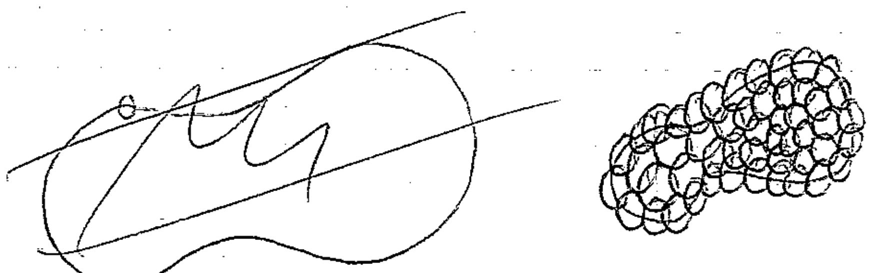
b) Soit $(E, \|.\|)$ un evn et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E qui converge vers $l \in E$. Alors $A = \{x_n : \cancel{n\geq 1}\ n\in\mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est compact.

En effet soit $(U_i)_{i\in I}$ ~~un recouvrement~~ une famille d'ouverts de E t.q. $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Soit i_0 t.q. $l \in U_{i_0}$ et $N\in\mathbb{N}$ t.q. $x_n \in U_{i_0}$ pour tout $n \geq N$; soit aussi J fini t.q. $x_1, \dots, x_{N-1}$ soient dans $\bigcup_J U_i$. On a $A \subset \bigcup_L U_i$ où $L = J \cup \{i_0\}$.

Lemme 1

Si A est compact, alors pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $n\in\mathbb{N}$ et des éléments $x_1, \dots, x_n$ de A t.q.
$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$$

Dessin



(143)

Preuve

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On raisonne par l'absurde en supposant que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall (x_1, \dots, x_n) \in A^n$
$A \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$.

On construit alors par récurrence une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A de la façon suivante :
Supposons u_i construits pour $0 \leq i < m$. Par hypothèse $A \not\subset \bigcup_{i<m} B(u_i, \varepsilon)$. Donc il existe

$$u_m \in A \setminus \bigcup_{i<m} B(u_i, \varepsilon).$$

La suite $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est telle que

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n < m \Rightarrow \|u_m - u_n\| \geq \varepsilon$$

et en échangeant u_m et u_n

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \quad n \neq m \quad \|u_m - u_n\| \geq \varepsilon.$$

Soit ℓ une valeur d'adhérence de $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$. Il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante t.q.

$$u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to \infty]{} \ell$$

Mais $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\| \leq \|u_{\varphi(n+1)} - \ell\| + \|\ell - u_{\varphi(n)}\|$
$\longrightarrow 0, \quad n \to \infty,$

ce qui contredit le fait que $\|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\| \geq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\lightning$.

Lemme 2

Si A est compact et $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de E t.q. $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$.
Alors
$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in A \quad \exists i \in I \quad B(x,\varepsilon) \subset U_i$

Preuve

On raisonne de nouveau par l'absurde. On suppose donc que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists x \in A \ \forall i \in I \ B(x,\varepsilon) \not\subset U_i$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe donc $u_n \in A$ t.q.

(*) $\forall i \in I \qquad B(u_n, \frac{1}{n+1}) \not\subset U_i$

Soit $l \in A$ une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante t.q.

$$u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} l$$

Comme $l \in A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, il existe $i \in I$ avec $l \in U_i$

Car U_i est ouvert, il existe $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ t.q.

$$B(l,\gamma) \subset U_i$$

Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ t.q.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N_1 \qquad \| u_{\varphi(n)} - l \| < \gamma/2$

Comme φ est strictement croissante

$$\frac{1}{\varphi(n)+1} \longrightarrow 0, \quad n \to \infty$$

donc il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N_2 \qquad \frac{1}{\varphi(n)+1} < \gamma/2$$

(145)

Soit $N = \max(n_1, n_2)$

$$B\left(u_{\varphi(N)}, \frac{1}{\varphi(N)+1}\right) \subset B\left(u_{\varphi(N)}, \eta/2\right)$$

$$\subset B(\ell, \eta) \subset U_i,$$

car $\|u_{\varphi(N)} - \ell\| < \eta/2$

ce qui contredit $(*)$ □

Preuve du théorème

(i) ⟹ (ii) Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de E t.q.

$$A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$$

Par le lemme 2 il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ t.q.

$\forall x \in A \ \exists i \in I \quad B(x, \varepsilon) \subset U_i$

Par le lemme 1 il existe $n \in \mathbb{N}$ et $x_1, \dots x_n \in A$ t.q.

$$A \subset \bigcup_{1\le j\le n} B(x_j, \varepsilon)$$

Pour $j \in \{1, \dots, n\}$ il existe $i_j \in I$ t.q. $B(x_j, \varepsilon) \subset U_{i_j}$

Donc

$$A \subset \bigcup_{1\le j\le n} B(x_j, \varepsilon) \subset \bigcup_{1\le j\le n} U_{i_j}$$

(ii) ⇒ (iii) Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de E

t.q.
$$A \cap \bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$$

On pose $U_i = E \setminus F_i$ pour $i \in I$

On a
$$A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$$

Donc il existe $J \subset I$, J fini t.q.
$$A \subset \bigcup_{j\in J} U_j$$

donc
$$A \cap \bigcap_{j\in J} F_j = \emptyset.$$

(iii) ⇒ (iv) Si $J \subset \mathbb{N}$ est fini
$$\bigcap_{n\in J} F_n = F_{\max(J)}$$

donc
$$\forall J \subset \mathbb{N} \text{ } J \text{ fini} \Rightarrow A \cap \Big(\bigcap_{n\in J} F_n\Big) \neq \emptyset$$

En utilisant la contraposée de (iii)
$$A \cap \Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n\Big) \neq \emptyset.$$

(iv) ⇒ (i)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une ~~famille~~ suite d'éléments de A.

Posons pour $n \in \mathbb{N}$
$$F_n = \overline{\{u_m : m \geq n\}} \text{ fermé de E.}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad u_n \in F_n \cap A \neq \emptyset$

et $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad F_{n+1} \subset F_n$

Donc $\underbrace{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n}_{} \cap A \neq \emptyset$ ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

0

cours 19

Corollaire

Soit $(E, \|.\|)$ un evn et soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés de E t.q.

(i) F_0 est compact

(ii) $\forall n\in\mathbb{N}$ $F_n \neq \emptyset$

(iii) $\forall n\in\mathbb{N}$ $F_{n+1} \subset F_n$

(on dit que F_n est une suite décroissante de compacts non vides)

Alors
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$$

Preuve

On applique la condition ~~(iii)~~ (iv) avec $A = F_0$.

2.3. Compacité et continuité

Théorème

Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ des espaces vectoriels normés. Soit $A \subset E$ et soit $f : A \to F$ une application continue. Si $B \subset A$ est compacte alors $f(B)$ est compact.

Preuve

Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de F t.q.

$f(B) \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Alors

$$B \subset f^{-1}(f(B)) \subset \bigcup_{i\in I} \underbrace{f^{-1}(U_i)}_{\text{ouvert de } A}$$

Pour tout i de I, il existe V_i ouvert de E t.q.

$$f^{-1}(U_i) = A \cap V_i$$

$$B \subset \bigcup_{i \in I} V_i.$$

Donc il existe $J \subset I$, J fini t.q.

$$B \subset \bigcup_{i \in J} V_i$$

d'où
$$B \subset \bigcup_{i \in J} f^{-1}(U_i)$$

donc
$$f(B) \subset \bigcup_{i \in J} f(f^{-1}(U_i)) \subset \bigcup_{i \in J} U_i,$$

donc $f(B)$ est compact. $\square$

<u>Exercice</u>. Refaire la preuve avec des suites!

<u>Corollaire 1</u>

Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ des evn. Soit $A \subset E$ et $B \subset F$. Soit $f : A \to B$ un homéomorphisme. Alors A est compact ssi B est compact.

<u>Preuve</u>

$B = f(A)$ et $A = f^{-1}(B)$. $\square$

<u>Corollaire 2</u>

Soit $(E, \|.\|_E)$ un evn et soit A une partie compacte de E. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors :

149

$f(A)$ est bornée et $f(A)$ atteint ses bornes sur A (i.e. $f(A)$ admet un plus petit et un plus grand élément).

Preuve

$f(A)$ est un compact de $\mathbb{R}$, c.à.d un fermé borné de $\mathbb{R}$, donc $f(A)$ est borné.
De plus $\sup(f(A))$ est limite d'éléments de $f(A)$. Comme $f(A)$ est fermé $\sup(f(A)) \in f(A)$.
De même on montre que $\inf(f(A)) \in f(A)$. $\square$

NB
En particulier si A est compact
$C(A, \mathbb{R}) \subset B(A, \mathbb{R})$ fonctions bornées

et
$$\|\cdot\|_\infty : \begin{array}{l} C(A,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ f \longmapsto \max_{x \in A} |f(x)| \end{array}$$
est une norme. Cela généralise le résultat montré pour les fonctions $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ où $a, b \in \mathbb{R}$ $a<b$.

Corollaire du corollaire 2

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. Soit A une partie compacte de E, $A \neq \emptyset$.
Alors $\forall x \in E \ \exists y \in A \quad d(x, A) = \|x - y\|$

Preuve

$$d(x,A) = \inf_{y\in A} \|x-y\| = \min_{y\in A} \|x-y\|$$

puisque $\begin{array}{l} A \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto \|x-y\| \end{array}$ est continue. $\square$

Corollaire du corollaire du corollaire 2

Soit $(E, \|.\|)$ un evn de dimension finie. Soit F une partie fermée non vide de E.
Alors $\forall x\in E \quad \exists y\in F \quad d(x,F) = \|x-y\|$.

Preuve
Soit $x\in E$. Posons $d = d(x,F)$

$$d = d(x,F) = \inf_{y\in F} \|x-y\| = \inf\{\|x-y\| : y\in F \text{ et } \|y-x\| \leq d+1\}$$
$$= d(x, \underbrace{F\cap \bar{B}(x, d+1)}_{\text{fermé, borné de } E, \text{ donc compact.}})$$

2.4 Compacité et uniforme continuité

Théorème (Heine)

Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ des evn.
Soit A une partie ~~de E~~ compacte de E. Si $f : A \to F$ est continue, alors f est uniformément continue

(151)

Preuve

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in A$ il existe $\eta_x \in \mathbb{R}_+^*$ t.q.

(*) $\forall y \in A \quad \|y - x\|_E < \eta_x \Rightarrow \|f(y) - f(x)\|_F < \varepsilon/2$

On a que
$$A \subset \bigcup_{x \in A} B(x, \tfrac{1}{2}\eta_x)$$

Donc il existe une partie finie J de A t.q.
$$A \subset \bigcup_{x \in J} B(x, \tfrac{1}{2}\eta_x)$$

Soit $\eta := \frac{1}{2} \min_{x \in J} \{\eta_x\} \in \mathbb{R}_+^*$

Soient $y, y' \in A$ t.q. $\|y - y'\|_E < \eta$

il existe $x \in J$ t.q. $y \in B(x, \frac{1}{2}\eta_x)$

donc $\|y' - x\|_E \leq \|y' - y\|_E + \|y - x\|_E < \eta + \frac{1}{2}\eta_x \leq \eta_x$

donc
$$\{y, y'\} \subset B(x, \eta_x),$$

donc
$$\|f(y) - f(y')\|_F \leq \|f(y) - f(x)\|_F + \|f(x) - f(y')\|_F \overset{(*)}{<} \varepsilon.$$

On a donc montré

$$\forall y \in A \quad \forall y' \in A \quad \|y - y'\| < \eta \Rightarrow \|f(y) - f(y')\| < \varepsilon. \quad \square$$

2.5. Approximation de fonctions continues sur un compact

Théorème (Stone - Weierstraß)

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit X une partie compacte de E. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre unitaire ($1 \in \mathcal{A}$) de $C(X, \mathbb{R})$ telle que

$\forall x, y \in X \quad x \neq y \Rightarrow (\exists f \in \mathcal{A} \quad f(x) \neq f(y))$

(On dit que $\mathcal{A}$ sépare les points de X).

Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $(C(X, \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$.

Définition

Soient X un ensemble $f \in \cancel{X^{\mathbb{R}}}\ \mathbb{R}^X$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\cancel{X^{\mathbb{R}}}\ \mathbb{R}^X$. On dit que

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f ssi

$\forall x \in X \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$

ssi $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in X \ \exists N \in \mathbb{N}$ (dépend de x et de ε) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N$
$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

- f_n converge uniformément vers f ssi

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists N \in \mathbb{N}$ (ne dépend que de ε) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N$

$\forall x \in X \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

(153)

Lemme

La fonction $|.| : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto |x|$ est limite uniforme sur $[-1, 1]$ de fonctions polynomiales.

Preuve

On définit par récurrence ~~pour~~ sur $n \in \mathbb{N}$ une suite de polynômes par $P_0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $P_{n+1} = P_n - \frac{1}{2}(P_n^2 - X^2)$

a) Montrons par récurrence que

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [-1, 1] \quad 0 \leq |x| \leq P_n(x) \leq 1.$

Si $n = 0$ c'est vrai.

Si c'est vrai pour n et $x \in [-1, 1]$

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) - \frac{1}{2}(P_n^2(x) - |x|^2)$$

$$P_{n+1}(x) - |x| = P_n(x) - |x| - \frac{(P_n(x) - |x|)(P_n(x) + |x|)}{2}$$

$$= (P_n(x) - |x|)\left(1 - \frac{P_n(x) + |x|}{2}\right)$$

Comme $\forall x \in [-1, 1] \quad 0 \leq P_n(x) + |x| \leq 2$

on a $\forall x \in [-1, 1] \quad \left(1 - \frac{P_n(x) + |x|}{2}\right) \in [0, 1]$

Donc $P_{n+1}(x) \geq |x|$ et

$$P_{n+1}(x) \leq |x| + P_n(x) - |x| \leq P_n(x) \leq 1.$$

En ~~particulier~~ outre,

$\forall x \in [-1, 1] \quad (P_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

b) Soit $x \in [-1, 1]$, $(P_n(x))$ est décroissante, minorée par $|x|$ donc converge.

Comme
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$u \longmapsto u - \frac{u^2 - x^2}{2}$$
est continue, la limite $\ell = \lim_{n \to +\infty} P_n(x)$ vérifie
$$\ell = \ell - \frac{\ell^2 - x^2}{2},$$
c.a.d. $\ell^2 = x^2$

or $\ell \geq 0$ donc $\ell = |x|$.

Donc P_n converge simplement vers $|.| : [-1,1] \to \mathbb{R}$
$$x \longmapsto |x|.$$

c) $\forall x \in [-1, 1]$

$$\underbrace{|P_n(x) - |x||}_{\text{positif}} \leq P_n(0) \quad \text{et} \quad P_n(x) + |x| \geq P_n(0).$$

On le montre par récurrence

Si $n=0$ $\forall x \in [-1, 1]$ $|1 - |x|| < 1$ et $1 + |x| \geq 1$

Si c'est vrai pour n
$$P_{n+1}(x) - |x| = (\underbrace{P_n(x) - |x|}_{\leq P_n(0)}) \underbrace{\left(1 - \frac{P_n(x) + |x|}{2}\right)}_{\leq 1 - \frac{P_n(0)}{2}}$$

Donc
$$P_{n+1}(x) - |x| \leq P_{n+1}(0)$$

De même
$$P_{n+1}(x) + |x| = \underbrace{(P_n(x) + |x|)}_{\geq P_n(0)} \underbrace{\left(1 - \frac{P_n(x) - |x|}{2}\right)}_{\geq 1 - \frac{P_n(0)}{2}}$$

donc $P_{n+1}(x) + |x| \geq P_{n+1}(0)$.

d) Par c)

$\forall n \in \mathbb{N}$ ~~$P_n - |x$~~ $\| P_n - |.| \|_\infty \leq P_n(0) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ (cours 15

Donc P_n converge uniformément vers $|.|$.

Cours 20

Proposition

Soit $(E, \|.\|)$ un evn. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel, alors $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve

Soit $f, g \in \overline{F}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Il existe des suites $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de F t.q.

$f_n \xrightarrow[n \to \infty]{} f$ et $g_n \xrightarrow[n \to \infty]{} g$

Donc $\lambda f_n + \mu g_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \lambda f + \mu g$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$ $\lambda f_n + \mu g_n \in F$

on a $\lambda f + \mu g \in \overline{F}$. □

Lemme 2

Sous les hypothèses du théorème $\overline{\mathcal{A}}$ est une sous-algèbre de $C(X, \mathbb{R})$ t.q.

a) Si $f \in \overline{\mathcal{A}}$, $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$

b) Si $f_1, \dots, f_n \in \overline{\mathcal{A}}$

$\max(f_1, \dots, f_n) : \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \max\limits_{1 \leq i \leq n} f_i(x) \end{array}$

et $\min(f_1, \dots, f_n) \in \overline{\mathcal{A}}$.

Preuve

- Montrons que c'est une sous-algèbre.
  Il existe des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ t.q. $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ et $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g$.

  $$\forall n\in\mathbb{N} \quad \|f_n g_n - fg\|_\infty \leq \|f_n(g_n-g)\| + \|(f_n-f)g\|_\infty$$
  $$\leq \|f_n\|_\infty \|g_n-g\|_\infty + \|f_n-f\|_\infty \|g\|_\infty,$$

  donc $\|f_n g_n - fg\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

  Donc $fg \in \overline{\mathcal{A}}$.

- Soit $u\in\overline{\mathcal{A}}$. Soit $M = \|u\|_\infty = \max_{x\in X} |u(x)|$

  $$\forall n\in\mathbb{N} \quad \underbrace{M P_n\left(\frac{u}{M}\right)}_{\text{polynôme en } u} \in \overline{\mathcal{A}} \text{ algèbre}$$

  (NB : $M P_n\left(\frac{u}{M}\right) : \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto M P_n\left(\frac{u(x)}{M}\right)\end{array}$)

  Mais $\forall x\in X \quad \frac{u(x)}{M} \in [-1,1]$ donc

  $$\forall x\in X \quad \left| M P_n\left(\frac{u(x)}{M}\right) - M\frac{|u(x)|}{M}\right| \leq M\, P_n(0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

  donc
  $$\left\| M P_n\left(\frac{u}{M}\right) - |u| \right\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

  et $|u| \in \overline{\overline{\mathcal{A}}} = \overline{\mathcal{A}}$ d'où a).

- Si $f_1, f_2 \in \overline{\mathcal{A}}$

$$\max(f_1, f_2) = \frac{f_1 + f_2 + |f_1 - f_2|}{2} \in \overline{\mathcal{A}}$$
$$\min(f_1, f_2) = \frac{f_1 + f_2 - |f_1 - f_2|}{2} \in \overline{\mathcal{A}}$$

- Si $f_1, \dots, f_n \in \overline{\mathcal{A}}$ et $n \geq 3$, on procède par récurrence

$$\min(f_1, \dots, f_n) = \min(f_1, \min(f_2, \dots, f_n)) \in \overline{\mathcal{A}}$$
$$\max(f_1, \dots, f_n) = \max(f_1, \max(f_2, \dots, f_n)) \in \overline{\mathcal{A}}.$$

<u>Preuve du théorème</u>

- Soit $x, y \in X$ et soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

On suppose $x \neq y$

Il existe donc $f \in \mathcal{A}$ t.q. $f(x) \neq f(y)$

Alors g défini par

$$\forall t \in X \quad g \in \mathcal{A} \quad g(t) = \lambda + \frac{\mu - \lambda}{f(y) - f(x)} (f(t) - f(x))$$

vérifie $g \in \mathcal{A}$ et $g(x) = \lambda$ et $g(y) = \mu$

~~(En effet~~ $\cancel{g = \left(\lambda - \frac{\mu - \lambda}{f(y) - f(x)} f(x)\right) + \frac{\mu - \lambda}{f(y) - f(x)} f}$)

- Soit $f \in C(X, \mathbb{R})$. Il faut montrer que $f \in \overline{\mathcal{A}}$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Pour tous $x, y \in X$ il existe $g_{x,y} \in \mathcal{A}$ t.q.

$$g_{x,y}(x) = f(x) \quad \text{et} \quad g_{x,y}(y) = f(y)$$

On note

$$\mathcal{U}_{x,y} = \{ z \in X : g_{x,y}(z) < f(z) + \varepsilon \}$$

ouvert de X (car $\mathcal{U}_{x,y} = (g_{x,y} - f)^{-1}(]-\infty, \varepsilon[)$).

Soit $V_{x,y}$ ouvert de E t.q.

$\mathcal{U}_{x,y} = X \cap V_{x,y}$.

Si $x \in X$, $X \subset \bigcup_{y \in X} V_{x,y}$.

Donc il existe $J(x)$ partie finie de X t.q.

$X \subset \bigcup_{y \in J(x)} V_{x,y}$ i.e. $X = \bigcup_{y \in J(x)} \mathcal{U}_{x,y}$

On pose $\quad h_x = \min_{y \in J(x)} g_{x,y} \in \overline{\mathcal{A}}$

Pour tout $z \in X$, il existe $y \in J(x)$ t.q.
$z \in \mathcal{U}_{x,y}$, donc $h_x(z) \le g_{x,y}(z) < f(z) + \varepsilon$
Donc $\quad \forall z \in X \quad h_x(z) < f(z) + \varepsilon$

On a aussi $\quad h_x(x) = \min_{y \in J(x)} g_{x,y}(x) = f(x)$

Pour tout x de X posons

$\mathcal{U}'_x = \{ z \in X : h_x(z) > f(z) - \varepsilon \}$ ouvert de X.

Comme $h_x(x) = f(x)$ $\quad X = \bigcup_{x \in X} \mathcal{U}'_x$.

Donc par le raisonnement qui précède il reste $J \subset X$ fini t.q.

$$X = \bigcup_{x \in J} \mathcal{U}'_x.$$

Soit $h = \max_{x \in J} h_x \in \overline{\mathcal{A}}$.

Comme tout à l'heure on montre

$\forall x \in X \quad f(x) - \varepsilon < h(x) < f(x) + \varepsilon$

donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists h \in \overline{\mathcal{A}} \quad \| f - h \|_\infty < \varepsilon$,

donc $\quad f \in \overline{\overline{\mathcal{A}}} = \overline{\mathcal{A}}$. $\square$

<u>Corollaire</u>

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Alors toute fonction $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ est limite uniforme de fonctions polynomiales.

<u>Preuve</u>

Soit $x, y \in [a,b]$ avec $x \neq y$. La fonction

$X : \begin{array}{l} [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x \end{array}$ vérifie $X(x) \neq X(y)$

Donc les fonctions polynomiales sur $[a,b]$ forment une sous-algèbre (unitaire) de $C([a,b], \mathbb{R})$ qui sépare les points de $[a,b]$ $\square$

NB

Plus généralement si $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ avec $a_i < b_i$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$, alors toute fonction $f \in C(\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i], \mathbb{R})$ est limite uniforme de fonctions polynomiales en n variables.

En effet

$\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ fermé borné de $\mathbb{R}^n$ est compact. Notons

$$X_i : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \longrightarrow x_i \end{array}$$

Si $\underline{x}, \underline{y} \in \prod_{i=1}^{n} \cancel{[a_1,} [a_i, b_i]$ avec $\underline{x} \neq \underline{y}$, alors il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ avec $\cancel{x \neq y}$ $X_i(x) \neq X_i(y)$, donc l'algèbre des fonctions polynomiales forme une sous-algèbre (unitaire) de $C(\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i], \mathbb{R})$ qui sépare les points de $\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$.

Exemple d'application

Si $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ alors

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(x) \cos(nx)\, dx = 0$$

En effet

Si f est dérivable de dérivée continue (i.e. f de classe C^1)

(16)

$$\int_a^b f(x)\cos(nx)\,dx = \left[f(x)\,\frac{\sin nx}{n}\right]_a^b - \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\sin nx\,dx$$

donc

$$\left|\int_a^b f(x)\cos(nx)\,dx\right| \leq \frac{1}{n}\Big(|f(a)|+|f(b)|$$

$$+\|f'\|_\infty (b-a)\Big)$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Mais il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions polynomiales (et donc de classe C^1) t.q.

$f_m \xrightarrow[m\to\infty]{} f$ pour $\|.\|_\infty$

donc

$$\left|\int_a^b f(x)\cos(nx)\,dx - \int_a^b f_m(x)\cos(nx)\right|$$

$$\leq \|f-f_m\|_\infty (b-a)$$

D'où

$\forall n\in\mathbb{N}, \forall m\in\mathbb{N}$

$$\left|\int_a^b f(x)\cos(nx)\,dx\right| \leq \|f-f_m\|_\infty (b-a)$$

$$+\left|\int_a^b f_m(x)\cos(nx)\,dx\right|$$

Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$.

Soit $m \in \mathbb{N}$ t.q. $\| f - f_m \| < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$

Soit $N \in \mathbb{N}$ t.q.

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N$ ~~tel~~ $\left| \int_a^b f_m(x) \cos(nx)\, dx \right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

alors

$\forall n \in \mathbb{N}$ $n \geq N$ ~~tel~~ $\left| \int_a^b f(x) \cos(nx)\, dx \right| < \varepsilon$

<u>Exemple d'application 2</u> (exo)

Soit $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$

t.q. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_a^b f(x)\, x^n\, dx = 0$.

Alors

$f = 0$.

<u>Indications</u>

- Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X]$ $\int_a^b f(x) P(x)\, dx = 0$.
- En déduire que $\int_a^b f^2\, dx = 0$
- Montrer que $f^2 = 0$ puis que $f = 0$.

cours <u>20</u>

cours 21

<u>2.6. Compacité et dimension finie</u>

<u>Théorème</u>

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit F un sous-espace vectoriel de <u>dimension finie</u> de E. Alors F est fermé.

(163)

<u>Preuve</u>

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F qui converge vers ℓ dans E. On munit F de la norme obtenue par restriction

$$\|\cdot\|: \begin{array}{l} F \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \|x\| \end{array}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans E, donc bornée dans E et donc dans F. Par Bolzano-Weierstraß pour les suites bornées dans un espace vectoriel de dimension finie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence dans F. ℓ étant la seule valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E on a

$\ell = \lim_{n\to\infty} u_n \in F.$ $\square$

<u>Exemple</u>

- Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$

Soit $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ une fonction continue qui n'est pas polynomiale.

Soit $\mathbb{R}[X]_n = \{ P \in \mathbb{R}[X] \ \deg P \leq n \}$

C'est un espace vectoriel de dimension $n+1$.

$$\varphi: \begin{array}{l} \mathbb{R}[X] \longrightarrow C([a,b], \mathbb{R}) \\ P \longmapsto (x \longmapsto P(x)) \end{array}$$

est un morphisme d'espaces vectoriels.

L'image de $\mathbb{R}[X]_n$ dans $(C([a,b], \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ est de dimension fini, donc fermée, donc
$\overline{\varphi(\mathbb{R}[X]_n)} = \varphi(\mathbb{R}[X]_n)$

Donc $\quad f \notin \overline{\varphi(\mathbb{R}[X]_n)}$

Conclusion

Soit f_n une suite de fonctions polynomiales sur $[a,b]$ qui converge uniformément vers f (cela existe par le théorème de Stone-Weierstraß). Alors le degré des polynômes tend vers $+\infty$.

Théorème (Riesz)

Soit $(E, \|.\|)$ un evn. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) E est de dimension fini
(ii) $\overline{B}(0,1)$ est compacte.

Preuve
(i) $\Rightarrow$ (ii)

$\overline{B}(0,1)$ est un fermé borné de E

Si E est de dimension fini $\overline{B}(0,1)$ est donc un compact de E. La réciproque repose sur le lemme suivant :

(164)

Lemme

Soit $(E, \|.\|)$ un evn. Soit F un sous-espace vectoriel de E t.q. $F \neq E$ et F fermé.
Alors pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ $\exists\, x \in S(0,1)$
$d(x, F) \geq 1 - \varepsilon$.

Preuve du lemme

Comme $F \neq E$, il existe $z \in E \setminus F$. Comme F est fermé $\neq \emptyset$ $F = \overline{F} = \{t \in E : d(t, F) = 0\}$
donc
$$\alpha = d(z, F) > 0.$$
Par définition de la distance il existe $y \in F$ t.q.
$$0 < \alpha \leq \|z - y\| \leq \alpha(1+\varepsilon)$$
Posons
$$x = \frac{z-y}{\|z-y\|} \in S(0,1)$$
Pour $t \in F$, on a
$$x - t = \frac{z-y}{\|z-y\|} - t = \frac{1}{\|z-y\|}\left(z - (y + \|z-y\| t)\right)$$
Comme $y + \|z-y\| t \in F$ et $d(z, F) = \alpha$
on a
$$\|z - (y + \|z-y\| t)\| \geq \alpha$$
d'où
$$\|x - t\| \geq \frac{1}{\|z-y\|}\alpha \geq \frac{\alpha}{\alpha(1+\varepsilon)} \geq 1 - \varepsilon$$
~~d'où~~ Donc
$$d(x, F) \geq 1 - \varepsilon \qquad \square$$

Fin de la preuve du théorème 2

$\neg(i) \Rightarrow \neg(ii)$

On suppose donc que E n'est pas de dimension finie.

On construit alors une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $S(0,1)$ de la façon suivante. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons x_m construit pour $m<n$.

On pose $F_n = \mathrm{Vect}(\{x_m ; m<n\})$.

F_n est engendré par une famille finie de vecteurs, donc F_n est de dimension finie, donc fermé dans E et distinct de E (puisque E n'est pas de dimension finie).

Par le lemme il existe $x_n \in S(0,1)$ t.q. $d(x_n, F_n) \geq \frac{1}{2}$.

On a donc

$\forall m,n \in \mathbb{N}$ ~~$m \neq n$~~ $m<n$ $\quad \|x_m - x_n\| \geq \frac{1}{2}$

Par symétrie

$\forall m,n \in \mathbb{N}$ $m \neq n$ $\quad \|x_m - x_n\| \geq \frac{1}{2}$

Supposons que l soit une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante t.q.

$$x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} l$$

donc

$$\|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ce qui contredit

$$\|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\| \geq \frac{1}{2}. \quad \square$$

3 Connexité par arcs

3.1. Définition et exemples

Définition

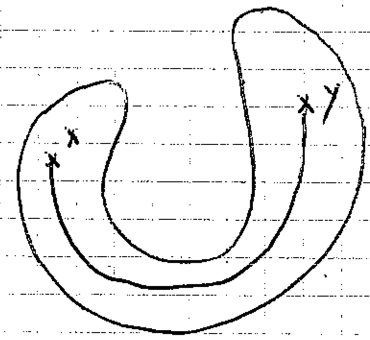
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit A une partie de E. Soit $x, y \in A$. Un arc ou chemin de x à y dans A est une application continue

$$p : [0,1] \longrightarrow E$$

t.q. $p(0) = x$ et $p(1) = y$.

On dit que x est l'origine de p et y le but de p (si $x = y$ on parle également de lacet).

Dessin



Définition

On définit sur A la relation $\sim_A$ par : pour tous $x, y \in A$, $x \sim_A y$ ssi il existe un chemin de x à y dans A.

NB Si $A \subset B$ $x \sim_A y \Rightarrow x \sim_B y$

Proposition

Avec ces notations, $\sim_A$ est une relation d'équivalence sur A.

Preuve

- $\sim_A$ est réflexive :

Si $x \in A$, $\gamma : \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow A \\ t \longmapsto x \end{array}$ est continue.

C'est un chemin de x à x.

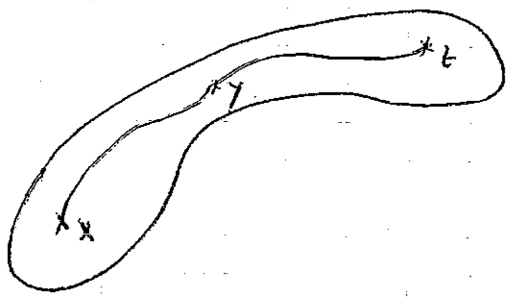
- $\sim_A$ est symétrique

Si $x, y \in A$ et $\gamma : [0,1] \to A$ un chemin de x à y dans A

$$\bar{\gamma} : \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow A \\ t \longmapsto \gamma(1-t) \end{array}$$

est continue. C'est un chemin de y à x dans A, donc
$\forall x, y \in A \quad x \sim_A y \Rightarrow y \sim_A x$.

- $\sim_A$ est transitive



Soit $x, y, z \in A$.

γ_1 un chemin de x à y dans A

et γ_2 ——— de y à z dans A.

(169)

Alors

$$\gamma := \cancel{\gamma_1 * \gamma_2} := \cancel{\gamma_1 * \gamma_2}\ \cancel{\gamma} \qquad \begin{array}{ccl} [0,1] & \longrightarrow & A \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2t-1) & \text{si } t \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \end{array}$$

est continue (en effet $\gamma_1(2 \times \frac{1}{2}) = \gamma_1(1) = y = \gamma_2(0)$
$= \gamma_2(2 \times \frac{1}{2} - 1))$

~~donc~~

On a $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = z$, donc γ est un chemin de x à z.

Donc $\forall x, y, z \in A$, $x \sim_A y$ et $y \sim_A z \Rightarrow x \sim_A z$. $\square$

Définition

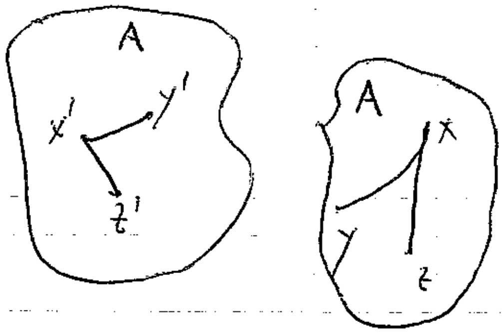
Avec les relations qui précèdent

- la partie A de E est dite connexe ~~par~~ par arcs ssi tout couple de points de A est relié par un chemin, c.a.d.
  $\forall x, y \in A \qquad x \sim_A y$
- On appelle composante connexe par arcs de A une classe de A pour la relation d'équivalence $\sim_A$, c.a.d une partie de la forme
  $\{y \in A : y \sim_A x\}$ pour un élément x de A.

NB

Autrement dit, deux éléments x, y de A appartiennent à la même composante connexe par arcs de A ssi il existe un chemin de x à y dans A.

Dessin



A est la réunion des deux patatoïdes.

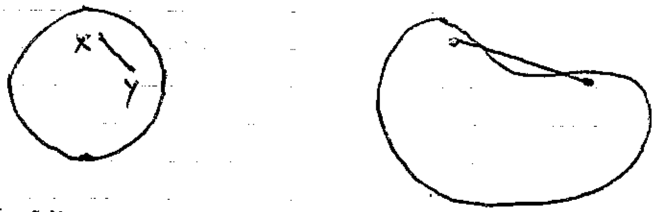
Deux composantes connexes.

Exemples

1) Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit A une partie de E.
On dit que A est convexe ssi

$$\forall x, y \in A \quad \forall t \in [0,1] \quad (1-t)x + ty \in A$$

Dessin



convexe

non convexe.

. $B(x,r)$ est convexe. Si $y, z \in B(x,r)$ alors

$$\|(1-t)y + tz - x\| = \|(1-t)(y-x) + t(z-x)\|$$
$$\leq (1-t)\|y-x\| + t\|z-x\|$$
$$< (1-t)r + tr = r.$$

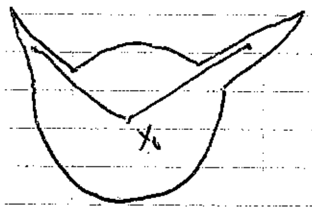
. Toute partie convexe de E est ~~convexe~~ connexe par arcs.

En effet si A est convexe et si $x, y \in A$

$$p : \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow A \\ t \longmapsto (1-t)x + ty \end{array}$$ est un chemin de x à y.

cours 21

2) Soit $(E, \|\ \|)$ un evn. Soit A une partie de E.
On dit que A est une partie étoilée de E ssi
il existe $x_0 \in A$ t-q.
$\forall y \in A \quad \forall t \in [0,1] \quad \cancel{(1-t)tx_0 + ty} \in A$
$\cancel{tx_0 + (1-t)y}$
$(1-t)x_0 + ty$



Toute partie étoilée de E est connexe par arcs.

En effet par le raisonnement qui précède
$\forall x \in A \qquad x \sim_A x_0$
Donc $\quad \forall x, y \in A, \qquad x \sim_A y.$

<u>Proposition</u>

Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$.

<u>NB</u> $\quad \emptyset$ et $\{a\}$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

<u>Preuve</u>

- Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, il est convexe, donc connexe par arcs.
- Soit I une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}$. Soient $x, y \in I$. Alors il existe un chemin

$$p : [0,1] \longrightarrow I$$

de x à y. Comme p est continue $p([0,1])$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Donc $[x, y] \subset \gamma([0, 1]) \subset I$.

Donc $\forall x, y \in I \quad [x, y] \subset I$.

Donc I est un intervalle de $\mathbb{R}$. $\square$

Proposition 2

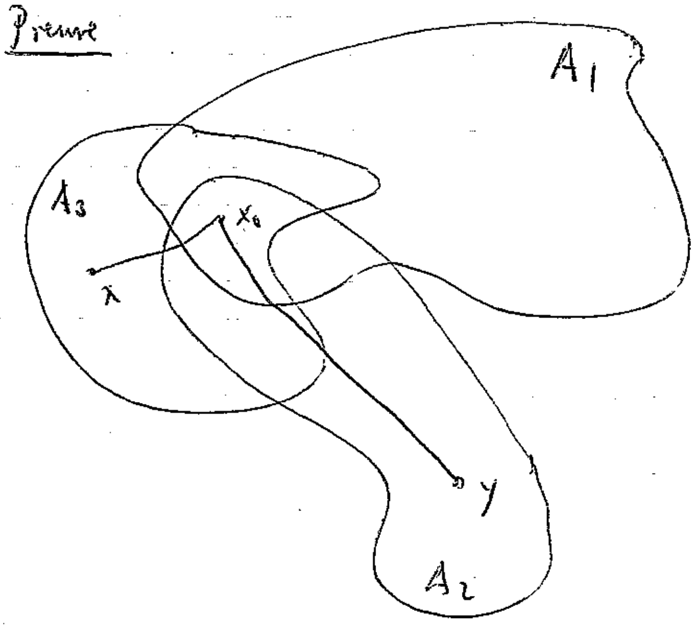
Soit $(E, \|.\|)$ un evn. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E. On suppose que

(i) $\forall i \in I \quad A_i$ est connexe par arcs

(ii) $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$

Alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe par arcs

Preuve



Soit $x_0 \in \bigcap_{i \in I} A_i$

Pour tout $x, y \in \bigcup_{i \in I} A_i = A$

il existe $i \in I$ t.q. $x \in A_i$

(173)

et $j \in I$ t.q. $y \in A_j$

Comme A_i et A_j sont connexes par arcs

$x \sim_{A_i} x_0 \Rightarrow x \sim_A x_0$ et $y \sim_{A_j} x_0 \Rightarrow y \sim_A x_0$

d'où $x \sim_A y$. $\square$

<u>Corollaire 1</u>

Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des parties connexes par arcs de E et si $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ pour $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, alors $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ est connexe par arcs.

Preuve par récurrence sur n.

<u>Exemple</u>

Si $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est connexe par arcs.

En effet posons

$U_i = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i > 0\}$ si $i \in \{1, \ldots, n\}$ et

$U_{i+n} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i < 0\}$ si $i \in \{1, \ldots, n\}$

Alors :

- $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} = \bigcup_{i=1}^{2n} U_i$

- $\forall i \in \{1, \ldots, 2n-1\} \quad U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$

(car $(1, \ldots, 1) \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i$, $(-1, \ldots, -1) \in \bigcap_{i=1}^{n} U_{i+n}$

et $(-1, 1, \ldots, 1) \in U_n \cap U_{n+1}$)

- pour $i \in \{1, .., 2n\}$ $\mathcal{U}_n$ est convexe donc connexe par arcs.

Corollaire 2

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de parties connexes par arcs de E t.q.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\qquad A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$.

Alors $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est connexe par arcs.

Preuve

Soient $x, y \in \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$

Il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $x, y \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

Par le Corollaire 1

$$x \sim_{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i} y$$

d'où

$$x \sim_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n} y. \qquad \square$$

3.2. Continuité et connexité par arcs

Théorème

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ des evn.

Soit $A \subset E$ et $B \subset A$. Soit $f : A \to F$ une application continue. Si B est connexe par arcs, alors $f(B)$ est connexe par arcs.

Preuve

Soient $y, y' \in f(B)$. Il existe $x, x' \in B$ t.q. $f(x) = y$, $f(x') = y'$.
Comme $x \sim_B x'$ il existe un chemin γ de x à x' dans B. $f \circ \gamma : [0, 1] \longrightarrow f(B)$ est un chemin de $f(x)$ à $f(x')$ dans $f(B)$.

Corollaire 1

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ des espaces vectoriels normés. Soit $A \subset E$ et $B \subset F$. Soit $f : A \longrightarrow B$ un homéomorphisme. Alors A est connexe par arcs ssi B est connexe par arcs.

Preuve

$B = f(A)$ et $A = f^{-1}(B)$ □

Corollaire du corollaire 1

* $\mathbb{R}$ n'est pas homéo-morphe à $\mathbb{R}^n$ si $n > 1$.

Preuve

Raisonnons par l'absurde. Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un homéomorphisme avec $n > 1$.

Alors soit $x_0 = \varphi(0)$ et considérons

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\} \\ y & \longmapsto & \varphi(y) \end{array}$$

ψ est bijective, continue et ψ^{-1} est continue (comme restriction d'applications continues), donc ψ est un homéomorphisme.

Mais $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ n'est pas connexe par arcs (car ce n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$)

$\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$ est connexe par arcs (car translation par x_0 est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$).

Contradiction $\lightning$. $\square$

<u>Corollaire 2</u>

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit X une partie de E connexe par arcs et soit $f : X \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors

$f(X)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

<u>Preuve</u>

$f(X)$ est connexe par arcs et les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$. $\square$

3.3. Topologie et connexité par arcs

176a

Propriété / Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. Soit X une partie de E.
Les assertions suivantes sont équivalentes

(i) il existe $U \subset X$, $U \neq \emptyset$, $U \neq E$ et U ouvert et fermé de X

(ii) il existe des ouverts U_1 et U_2 de X tels que $X = U_1 \cup U_2$, $U_1 \neq \emptyset$ et $U_2 \neq \emptyset$ et $U_1 \cap U_2 = \emptyset$

(iii) il existe des fermés F_1 et F_2 de X tels que $X = F_1 \cup F_2$, $F_1 \neq \emptyset$ et $F_2 \neq \emptyset$ et $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.

(iv) il existe une application continue surjective
$$f : X \longrightarrow \cancel{[0,1]} \ \{0, 1\}$$

On dit que X est connexe ssi elle ne vérifie pas ces conditions.

Preuve

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) résulte du fait qu'un fermé de X est le complémentaire d'un ouvert.

(ii) $\Rightarrow$ (iv)

Si $X = U_1 \cup U_2$ avec $U_1 \neq \emptyset$, $U_2 \neq \emptyset$, $U_1 \cap U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. On définit

$$f : \begin{array}{l} X \longrightarrow \{0, 1\} \\ x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in U_1 \\ 1 & \text{si } x \in U_2 \end{cases} \end{array}$$

Les ouverts de $\{0,1\}$ sont

$\emptyset$, $\{0\} = \{0,1\} \cap \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, $\{1\} = \{0,1\} \cap \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$,

$\{0,1\} = \{0,1\} \cap \left]-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$.

Pour tout ouvert V de $\{0,1\}$: $f^{-1}(V) \in \{\emptyset, U_1, U_2, X\}$

est un ouvert de X. Donc f est continue.

(iv) $\Rightarrow$ (ii) $\quad X = f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1)$

ouverts non vides disjoints

□

<u>Proposition</u>

Si X est connexe par arcs, alors X est connexe.

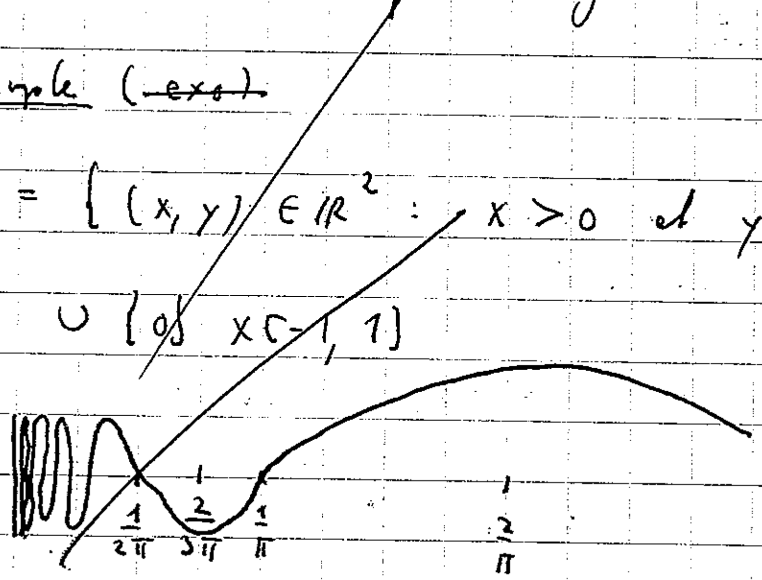
<u>Preuve</u>

Cela résulte du corollaire 2. □

Attention : La réciproque est fausse en général.

<u>Exemple</u> (~~exo~~)

$$X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ et } y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right\} \cup \{0\} \times [-1, 1]$$



est connexe, mais pas connexe par arcs.

(176c)

Indications

1) Montrer que $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ et } y = \sin(\frac{1}{x})\}$ est connexe par arcs et que $X \subset \overline{Y}$. En déduire que X est connexe.

2) Soit $\mu : [0, 1] \to X$ un chemin tel que $\mu(0) = (\frac{2}{\pi}, 0)$ et $\mu(1) = (0, 0)$

a) Montrer que pour tout $t \in [0, 1)$, on a $[0, pr_1(\mu(t))] \subset pr_1 \circ \mu([0, 1])$, où

$$pr_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto x \end{array}$$

b) Construire une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $[0, 1]$ telle que $u_n \to 1$, $n \to \infty$ et $\mu(u_n) \to (0, 1)$, $n \to \infty$

c) Montrer que X n'est pas connexe par arcs.

Proposition

Les composantes connexes par arcs d'un ouvert d'un evn sont des ouverts.

Preuve

- Soit $(E, \|.\|)$ un evn. Soit U un ouvert de E. Soit $x \in U$. Il faut montrer que

$C_x := \{y \in U : x \underset{U}{\sim} y\}$ est ouvert.

- Soit $y \in E$ et soit $r \in \mathbb{R}_+^*$

Lemme

Soit $(E, \|.\|)$ un evn et A une partie connexe de E. Alors toute partie B de E telle que $A \subset B \subset \overline{A}$ est connexe.

Preuve

Soient V_1 et V_2 deux ouverts disjoints de B de réunion B. Ils sont de la forme $V_1 = U_1 \cap B$, $V_2 = U_2 \cap B$, avec U_1 et U_2 ouverts de E. Mais $W_1 = U_1 \cap A$ et $W_2 = U_2 \cap A$ sont deux ouverts disjoints de A de réunion A ; comme A est connexe, l'un deux est vide ; supposons par exemple que ce soit $U_1 \cap A$. Mais alors $U_1 \cap B$ est vide, car $A \subset E \setminus U_1$ qui est fermé, donc $\overline{A} \subset E \setminus U_1$, donc $\underbrace{B}_{\text{à fortiori}} \subset E \setminus U_1$.

Par suite B est connexe.

Proposition

Si X est connexe par arcs, alors X est connexe.

Preuve

Cela résulte du corollaire 2.

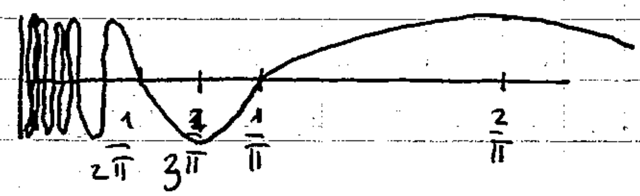
Attention : La réciproque est fausse en général.

Exemple

$$X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ et } y = \sin(\tfrac{1}{x})\}$$

$$X_2 = \{0\} \times [-1, 1]$$

$$X = X_1 \cup X_2.$$



X est connexe (exo) mais pas connexe par arcs ~~(exo)~~.

<u>Indications</u>

1) X_1 est connexe par arcs, donc connexe.

2) ~~X~~ $X \subset \overline{X_1}$. En déduire que X est connexe.

~~3)~~

<u>X n'est pas connexe par arcs</u>

Supposons qu'il existe une application continue $\mu : [0,1] \to X_1 \cup X_2$ telle que $\mu(0) = a = (\lambda, \sin(\frac{1}{\lambda})) \in X_1$, $\lambda > 0$ et $\mu(1) = b = (0, \mu) \in X_2$, $-1 \leq \mu \leq 1$.

Pour tout $t \in [0,1]$, $\mu(t)$ s'écrit $(\mu_1(t), \mu_2(t))$ avec $|\mu_2(t)| \leq 1$ si $\mu_1(t) = 0$ et $\mu_2(t) = \sin(\frac{1}{\mu_1(t)})$ si $\mu_1(t) > 0$.

L'ensemble $\{t \in [0,1] : \mu_1(t) = 0\}$ est non vide (il contient 1) et minoré par 0, soit t_m sa borne inférieure. On a $0 < t_m \leq 1$. Pour tout $t \in [0, t_m[$, on a $\mu_1(t) > 0$ et puisque μ est continue, $\mu_1(t_m) = 0$, ~~on a~~ lorsque $t \to t_m$, $\mu(t) = (\mu_1(t), \mu_2(t))$ tend vers $(0, \mu_2(t_m))$; il existe donc $\eta > 0$ vérifiant $0 \leq t_m - \eta$ tel que si $t \in [t_m - \eta, t_m[$, on ait $|\mu_2(t) - \mu_2(t_m)| \leq \frac{1}{2}$.

Mais cela est impossible car lorsque t parcourt $[t_m - \eta, t_m[$, $\mu_1(t)$ prend toutes les valeurs strictement comprises entre 0 et $\mu_1(t_m - \eta)$, qui est > 0, tandis que $\mu_2(t) = \sin(\frac{1}{\mu_1(t)})$ prend une infinité de fois les valeurs $+1$ et -1.

Proposition

Les composantes connexes par arcs d'un ouvert d'un evn sont des ouverts.

Preuve

- Soit $(E, \|.\|)$ un evn. Soit U un ouvert de E. Soit $x \in U$. Il faut montrer que

$$C_x := \{ y \in U : x \sim_U y \} \text{ est ouvert.}$$

- ~~Soit $y \in E$ et soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. $B(y, r)$ est convexe, donc connexe par arcs.~~
- Soit $y \in E$ tel que $x \sim_U y$. $y \in U$ et U est ouvert. Donc il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(y, \varepsilon) \subset U$. Mais $B(y, \varepsilon)$ est convexe et donc connexe par arcs. Donc pour tout $z \in B(y, \varepsilon)$ $y \sim_{B(y,\varepsilon)} z$. Donc $y \sim_U z$ et $x \sim_U z$,

donc $B(y, \varepsilon) \subset C_x$ et C_x est ouvert.

Corollaire

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Alors U est réunion d'intervalles ouverts disjoints.

Preuve

U est la réunion de ses composantes connexes par arcs qui sont les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. $\square$