Théorème de Stone-Weierstrass complexe :

X espace compact. $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{C}) = \{ f : X \to \mathbb{C} \text{ continues} \}$

$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

On suppose : (i) $\mathcal{S}$ sous algèbre unitaire sur $\mathbb{C}$.

(ii) $\mathcal{S}$ stable par conjugaison : $\forall f \in \mathcal{S}, \bar{f} \in \mathcal{S}$.

(iii) $\mathcal{S}$ sépare les points : $\forall x,y \in X \; x \neq y \; \exists f \in \mathcal{S}$ tq $f(x) \neq f(y)$.

Conclusion : $\bar{\mathcal{S}} = \mathcal{C}(X,\mathbb{C})$.

Démonstration :

$\mathcal{S}_\mathbb{R} = \{ \operatorname{Re} f, \; f \in \mathcal{S} \} \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$.

$\operatorname{Re}(f) = \frac{1}{2}(f + \bar{f}) \in \mathcal{S}$.

$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Re}(-if) \in \mathcal{S}$

$\mathcal{S}_\mathbb{R} = \mathcal{S} \cap \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ sous algèbre unitaire de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$.

$\mathcal{S}_\mathbb{R}$ sépare les points.

$f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{C})$.

$f = u + iv \quad u, v \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$.

$\underset{\text{th.}\mathbb{R}}{=} \lim (\underset{\mathcal{S}_\mathbb{R}}{P_n} + \underset{\mathcal{S}_\mathbb{R}}{Q_n}) \qquad P_n + iQ_n \in \mathcal{S}$. ■

Corollaire : $\mathcal{C}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{C})$

$\mathcal{S} = \left\{ \sum_{n=-N}^{+N} c_n e^{inx}, \; c_n \in \mathbb{C} \right\}$ vérifie (i), (ii) et (iii).

Conclusion : $\bar{\mathcal{S}} = \mathcal{C}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.

IV. Théorie L^2 des séries de Fourier.

Définition :
$\mathcal{C}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{C}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ continues périodique de période } T \}$.

C'est un espace pré-hilbertien pour le produit scalaire sesquilinéaire :

$$\langle f, g \rangle \underset{\text{déf}}{=} \frac{1}{T} \int_0^T \overline{f(x)}\, g(x)\, dx = \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx.$$

$\mathbb{R}/T\mathbb{Z} \simeq S^1$

$x \longmapsto e^{i\omega x} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$ "pulsation"

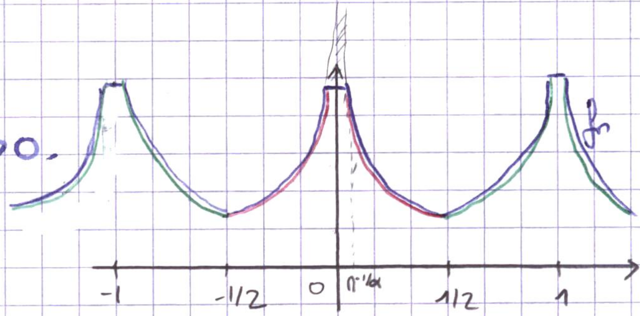
$\langle f,f\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2\,dx = \|f\|_2^2 \geq 0$ et ne s'annule que si $f=0$.

Proposition : Ce n'est pas un espace complet pour la norme L^2.

Exemple :

$T=1$ sur intervalle $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

$$f(x)=\begin{cases}|x|^{-\alpha} & x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\setminus\{0\},\ \alpha>0.\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$



prolongée par périodicité.

$$\|f\|_2^2=\int_{-1/2}^{1/2}|x|^{-2\alpha}\,dx$$
$$=2\int_0^{1/2}x^{-2\alpha}\,dx$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{1/2}x^{-2\alpha}\,dx$$
$$=\lim_{\varepsilon\to\infty}\left[\frac{1}{1-2\alpha}x^{1-2\alpha}\right]_\varepsilon^{1/2}$$
$$=\begin{cases}\frac{1}{1-2\alpha}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-2\alpha} & \text{si } 0<\alpha<\frac{1}{2} \quad \text{CV.}\\ +\infty & \text{si } \alpha\geq\frac{1}{2} \quad \text{DV}\end{cases}$$

$$f_n(x)=\begin{cases}\min(|x|^{-\alpha},n) & \text{si } x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\setminus\{0\}\\ n & \text{si } x=0\end{cases}$$

prolongée par périodicité de période 1.

f_n continue, $f_n\in\mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z},\mathbb{C})$

$$\|f-f_n\|_2^2=\int_{-n^{-1/\alpha}}^{n^{-1/\alpha}}|f(x)-f_n(x)|^2\,dx$$
$$=2\int_0^{n^{-1/\alpha}}(x^{-\alpha}-n)^2\,dx$$
$$\leq 2\int_0^{n^{-1/\alpha}}x^{-2\alpha}\,dx = 2\left[\frac{1}{1-2\alpha}x^{1-2\alpha}\right]_0^{n^{-1/\alpha}} = \frac{2}{1-2\alpha}\left(n^{-1/\alpha}\right)^{1-2\alpha}.$$
$$=\frac{2}{1-2\alpha}n^{-\frac{1-2\alpha}{\alpha}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

p, q grands $\|f_p-f_q\|_2\leq\|(f-f_q)-(f-f_p)\|_2$

$$\leq \underbrace{\|f-f_q\|_2}_{\substack{\downarrow\\ q\to\infty}}+\underbrace{\|f-f_p\|_2}_{\substack{\downarrow\\ p\to\infty}}$$

(f_n) suite de Cauchy dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z},\mathbb{C})$ pour $\|\cdot\|_2$.

Supposons $\exists g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z},\mathbb{C})$ tq $\|g-f_n\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$f_n = f$ en dehors de $[-n^{-1/\alpha}, n^{-1/\alpha}]$ modulo $\mathbb{Z}$.

$$0 \leq \int_\varepsilon^{1/2} |g(x)-f(x)|^2 dx = \int_\varepsilon^{1/2} |g-f_n(x)|^2 dx$$

$\varepsilon > 0$

$$\leq \|g-f_n\|_2^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \int_\varepsilon^{1/2} |g(x)-f(x)|^2 dx = 0.$$

g, f continues sur $[\varepsilon, \frac{1}{2}] \Rightarrow g = f$ sur $[\varepsilon ; \frac{1}{2}]$. $\forall \varepsilon > 0$

de même, $g = f$ sur $[-\frac{1}{2}, \varepsilon]$ $\forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow g = f$ sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \setminus \{0\}$

absurde car f non bornée en 0, donc ne se prolonge pas par continuité en 0.

Théorème : Il existe un espace de fonctions noté $L^2(\mathbb{R}/T\mathbb{Z},\mathbb{C}) \supset \mathcal{C}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z},\mathbb{C})$.
"fonctions de carré intégrable au sens de Lebesgue".
(i) $L^2(\mathbb{R}/T\mathbb{Z},\mathbb{C})$ complet, donc espace de Hilbert.
(ii) $\mathcal{C}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z},\mathbb{C})$ dense dans $L^2(\mathbb{R}/T\mathbb{Z},\mathbb{C})$.

Rem : Théorie de Henstock-Kurzweil (J-Y Briend)
ou page web de J. Demailly.

Théorème : Les fonctions $(e^{in\omega x})_{n\in\mathbb{Z}}$ forment une base hilbertienne dans $L^2(\mathbb{R}/T\mathbb{Z},\mathbb{C})$.

Démonstration :

$e_n(x) = e^{in\omega x}$

$$\langle e_p, e_q\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-ip\omega x} e^{iq\omega x} dx = \frac{1}{T}\int_0^T e^{i(q-p)\omega x} dx.$$

$$\langle e_p, e_q\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } p=q \\ 0 & \text{si } p\neq q. \end{cases}$$

$$\int_0^T e^{i(q-p)\omega x} dx = \left[\frac{1}{i(q-p)\omega} e^{i(q-p)\omega x}\right]_0^T = 0 \text{ par périodicité si } p\neq q.$$

Stone-Weierstrass $\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \forall f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z},\mathbb{C}), \exists P_N(x) = \sum_{n=-N}^{+N} c_n e^{in\omega x}$ tq $\|f-P_N\|_\infty < \varepsilon$.

Fait fondamental : $\|f\|_2^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2 dx$

$$\leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|^2 = \|f\|_\infty^2.$$

$\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$.

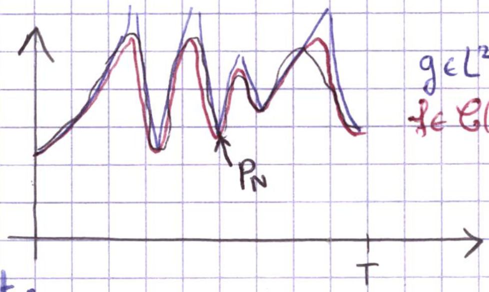
donc $\|f - P_N\|_2 \leq \|f - P_N\|_\infty < \varepsilon$.

(ii) densité des fonctions continues dans L^2

$\forall g \in L^2(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}/\mathbb{C})$, $\|g - f\|_2 < \varepsilon$.

Ceci $\Rightarrow \|g - P_N\|_2 \leq \|g - f\|_2 + \|f - P_N\|_2 < 2\varepsilon$.

Conclusion Vect $\langle e_n \rangle_{n\in\mathbb{Z}}$ dense dans $L^2(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. ■



$g \in L^2$

$f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.

Réinterprétation :

On a un isomorphisme d'espaces de Hilbert $\ell^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{C})$

$$(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \longmapsto f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n$$

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x}.$$

$$c_n = \langle e_n, f \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-ni\omega x} f(x)\, dx.$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n$ converge dans $L^2(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{C})$

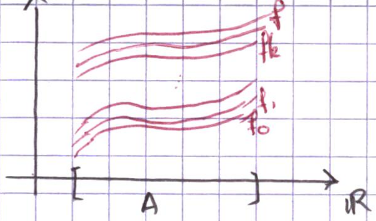
Formule de Parceval - Bessel : $\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$.

$f = \sum c_n e_n \qquad g = \sum c_n' e_n$

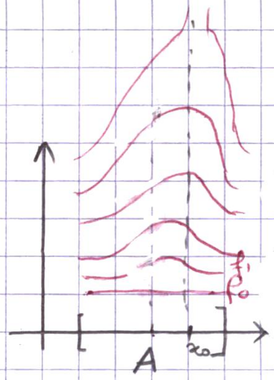
$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \overline{f(x)}\, g(x)\, dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{c_n} c_n'.$$

V. Théorème de Dini.

Théorème : Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique compact (par exemple $X = A$ fermé borné de $\mathbb{R}$). Supposons qu'on ait une suite monotone $f_k : X \to \mathbb{R}$ de fonctions continues convergeant simplement vers $f : X \to \mathbb{R}$ continue. Alors la convergence est uniforme.



$$\|f - f_k\|_\infty \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$



Attention : C'est faux si on ne suppose pas la limite continue.

Démonstration :

Supposons f_k croissante.

Fixons $\varepsilon > 0$ $x_0 \in X$ $\lim_{k\to\infty} f_k(x_0) = f(x_0)$

$\exists N(x_0)$ tq $k \geq N(x_0) \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon \leq f_k(x_0) \leq f(x_0)$

Fixons $k_0 = N(x_0)$

f et $f(k_0)$ sont continues $\Rightarrow \exists V_{x_0}$ voisinage ouvert de x_0.

sur lequel $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ si $x \in V_{x_0}$

$|f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)| \leq \varepsilon$ si $x \in V_{x_0}$

Ceci entraîne $f(x) - f_{k_0}(x_0) \leq (f(x_0) + \varepsilon) - (f_{k_0}(x_0) - \varepsilon)$

$$\leq \underbrace{f(x_0) - f_k(x_0)}_{\leq \varepsilon} + 2\varepsilon$$

$$\leq 3\varepsilon$$

$\forall x \in V_{x_0}$, $\forall k \geq k_0 = N(x_0)$ $f(x) - 3\varepsilon \leq f_k(x) \leq f(x)$

$(V_{x_0})_{x_0 \in X}$ recouvrement ouvert de X.

$\Rightarrow$ (Borel-Lebesgue) $\exists V_{x_1}, \dots, V_{x_s}$ recouvrement extrait fini de X.

Si je prends $k \geq \max(N(x_1), \dots, N(x_s))$ on a $f(x) - 3\varepsilon \leq f_k(x) \leq f(x)$ sur X.

$\Rightarrow \|f - f_k\|_\infty \leq 3\varepsilon$.

VI. Théorème d'Ascoli (version simplifiée).

(X,d), (Y,d') compacts (espaces métriques).

Théorème : Soit $f_n : X \to Y$ vérifiant $\exists C > 0, \exists \alpha > 0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x_1, x_2 \in X$ $d'(f_n(x_1), f_n(x_2)) \leq C\, d(x_1, x_2)^\alpha$

[mêmes constantes C, α pour toutes les f_n].

Alors, $\exists$ sous-suite (f_{n_k}) qui CV vers une limite $f : X \to Y$ qui est α-höldérienne de constante C.

$\Leftrightarrow$ $Z = \text{Hölder}_{C,\alpha}(X,Y) = \{ f : X \to Y,\ \forall x_1, x_2\ d'(f(x_1), f(x_2)) \leq C\, d(x_1, x_2)^\alpha \}$?

$\delta_\infty(f,g) = \sup_{x \in X} d'(f(x), g(x))$

Théorème : (Z, δ_∞) est compact.

Contre exemple :

$X = [0, 2\pi]$ $\quad Y = [-1, 1]$.

$f_n(x) = \cos(nx)$

$f_n'(x) = -n \sin(nx)$

$|f_n'(x)| \leq n$.

f_n est n-lipschitzienne $(\alpha = 1, c = n)$.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos px - \cos qx|^2 \, dx = 1 \text{ si } p \neq q.$$

$\Rightarrow \|f_p - f_q\|_\infty \geq 1$

On ne peut extraire de sous-suite convergente.