À la limite $\langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow x \in S^{\perp}$.

(ii) $S \subset \bar{S} \overset{\text{clair}}{\Rightarrow} (\bar{S})^{\perp} \subset S^{\perp}$.

Prenons $x \in S^{\perp}$ et $y \in \bar{S}$, $y = \lim_{n\to\infty} y_n$, $y_n \in S$.

$\langle x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \underset{S^{\perp}}{\underset{\cap}{x}}, \underset{S}{\underset{\cap}{y_n}}\rangle = 0$.

donc $x \in (\bar{S})^{\perp}$ ■

Corollaire 3: Pour tout sev S du Hilbert E $(S^{\perp})^{\perp} = \bar{S}$.

Démonstration:

$S^{\perp} = (\bar{S})^{\perp} \Rightarrow (S^{\perp})^{\perp} = (\bar{S}^{\perp})^{\perp} = \bar{S}$ ■

Définition: Une partie A d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dite dense dans X si $\bar{A} = X$.

Si (X,d) espace métrique, A dense $\Leftrightarrow \forall x \in X, \exists$ suite $a_n \in A$ tq $\lim a_n = x$.

Exemples: $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

$\mathbb{D}_{10}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Corollaire 4: Soit S un sev d'un Hilbert E.

$\bar{S} = E \Leftrightarrow S^{\perp} = \{0\}$.

Démonstration:

$\Rightarrow)$ $\bar{S} = E \Rightarrow S^{\perp} = (\bar{S})^{\perp} = E^{\perp} = \{0\}$

$\Leftarrow)$ $\bar{S} = (S^{\perp})^{\perp} = (\{0\})^{\perp} = E$. ■

Définition: On dit qu'une suite de vecteurs $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est totale si le sous-espace vectoriel engendré par les v_n

$S = \{\sum_{n=0}^{N} \lambda_n v_n, \lambda_n \in \mathbb{K}\}$ est dense.

$S^{\perp} = \{w \in E ; w \perp S\} = \{w \in E, w \perp v_n \ \forall n \in \mathbb{N}\}$.

Corollaire 4': Dans un Hilbert E, une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale càd engendre un sev S dense ssi $\forall w \in E, \forall n \in \mathbb{N}$ $\langle v_n, w\rangle = 0 \Rightarrow w = 0$.

Rem: ceci traduit le fait que $\bar{S}^{\perp} = \{0\}$.

Théorème : Soit E un espace de Hilbert. Alors $\exists$ système orthonormé maximal $(e_i)_{i\in I}$ [i.e. $\|e_i\| = 1$ et $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ $\forall i \neq j \in I$] et on a $\overline{\mathrm{Vect}(E_i)_{i\in I}} = E$.
De plus, tout vecteur $x \in E$ s'écrit comme somme convergeante $x = \sum_{i\in I} x_i e_i$.
($= \sum_{n=0}^{\infty} x_{i_n} e_{i_n}$ somme dénombrable). avec $\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |x_i|^2 < \infty$.

Corollaire : $\ell^2(I) \longrightarrow E$, $(x_i)_{i\in I},\ x_i \in \mathbb{K} \longmapsto x = \sum_{i\in I} x_i e_i$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert.
(bijection linéaire qui préserve les normes : $\|x\|^2 = \sum |x_i|^2$).

Démonstration :

(Théorème de Zorn) $\Rightarrow$ $\exists$ système orthonormé maximal $(e_i)_{i\in I}$

$S = \mathrm{Vect}(e_i) = \{$combinaisons linéaires finies$\}$.

$\bar{S}$ sev fermé de E.

$E = \bar{S} \oplus (\bar{S})^{\perp}$

Supposons $\bar{S} \subsetneq E \Rightarrow \bar{S}^{\perp} \neq \{0\}$

Prenons $\varepsilon \in \bar{S}^{\perp}$, $\|\varepsilon\| = 1$

$(e_i, \varepsilon)_{i\in I}$ système orthonormé $\supsetneq (e_i)_{i\in I}$

contradiction, donc $\bar{S} = E$.

Prenons $x \in E$ et définissons sa composante $x_i \in \mathbb{K}$ par $x_i = \langle e_i, x\rangle$.

Prenons un nombre fini $e_{i_1}, \dots, e_{i_n}$.

$$x = \underbrace{x_{i_1} e_{i_1} + \dots + x_{i_n} e_{i_n}}_{S_n = \mathrm{Vect}(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})} + \underbrace{y_n}_{\in S_n^{\perp}}$$

$$y_n = x - \sum_{k=1}^{n} x_{i_k} e_{i_k}.$$

$$\langle e_i, y_n\rangle = \langle e_i, x\rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle e_i, e_{i_k}\rangle x_{i_k} = 0 \text{ si } i = i_k.$$

$$\|x\|^2 \underset{\text{Pythagore}}{=} \|x_{i_1} e_{i_1} + \dots + x_{i_n} e_{i_n}\|^2 + \|y_n\|^2$$
$$= |x_{i_1}|^2 + \dots + |x_{i_n}|^2 + \|y_n\|^2.$$

Cq: $|x_{i_1}|^2 + \dots + |x_{i_n}|^2 \leq \|x\|^2$.

$$\sum_{i\in I} |x_i|^2 = \sup_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ i_1, \dots, i_n \in I}} |x_{i_1}|^2 + \dots + |x_{i_n}|^2 \leq \|x\|^2.$$

au plus une série infinie dénombrable $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_{i_n}|^2$.

$\sigma_p = \sum_{n=0}^{p} x_{i_n} e_{i_n}$ suite de Cauchy.

$q > p \quad \sigma_q - \sigma_p = \sum_{n=p+1}^{q} x_{i_n} e_{i_n} \Rightarrow \|\sigma_p - \sigma_q\|^2 = \sum_{n=p+1}^{q} |x_{i_n}|^2.$

↳ arbitrairement petit quand $p, q \geq N$ assez grand.

E complet $\Rightarrow \sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_{i_n} e_{i_n}$.

$$x = \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} x_{i_n} e_{i_n}}_{\overline{S} = \overline{\text{vect}(e_i)}} + \underbrace{y}_{\overline{S}^{\perp}}$$

$\overline{S} = E$, $\overline{S}^{\perp} = \{0\} \Rightarrow y = 0$.

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_{i_n} e_{i_n} \text{ et } \|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_{i_n}|^2 = \sum_{i \in I} |x_i|^2. \quad \blacksquare$$

Définition : Un système orthonormal maximal est aussi appelé base hilbertienne (ce n'est pas une base "algébrique" sauf en dimension finie).

Cas particulier : E est "séparable", càd $\exists$ suite totale $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i.e. $\overline{\text{Vect}(v_n)} = E$.

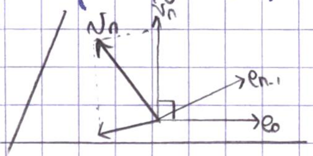
En supprimant de proche en proche les v_n qui sont CL des vecteurs $v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_{n-1}}$.

On peut supposer les vecteurs v_n linéairement indépendants.

Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt :

$e_0 = \frac{1}{\|v_0\|} v_0 \quad (v_0)$ libre $\Leftrightarrow v_0 \neq 0$.

On construit par récurrence $e_0, e_1, \dots,$ en formant un système orthonormé tel que $\text{Vect}(v_0, v_1, \dots, v_n) = \text{Vect}(e_0, e_1, \dots, e_n)$.



$S_{n-1} = \text{Vect}(v_0, \dots, v_{n-1}) = \text{Vect}(e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$.

On "redresse" v_n.

$$\tilde{v}_n = v_n - \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \langle e_i, v_n \rangle e_i}_{\text{proj} \perp \text{ sur } S_{n-1}}$$

$$e_n = \frac{1}{\|\tilde{v}_n\|} \tilde{v}_n$$

On obtient un système orthonormé $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\overline{\text{Vect}(e_n)} = \overline{\text{Vect}(v_n)} = E$ et $\overline{\text{Vect}(e_n)}^{\perp} = \{0\}$

Conclusion: $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ base hilbertienne.

$$\ell^2(\mathbb{N}) \xrightarrow{\text{isom}} E$$
$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n \qquad \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2.$$

Tout espace de Hilbert séparable et de dimension infinie est isomorphe à $\ell^2(\mathbb{N})$ (sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

III. Théorème de Stone-Weierstrass.

X espace topologique compact.

(cas qui m'intéresse $X = A$ partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$).

$E = \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) = \{ f : X \to \mathbb{R} \text{ continues} \}$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

$(E, +, \cdot, \times, \|\cdot\|)$ $\quad \|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$.

C'est une algèbre de Banach.

Exemple :

A fermée bornée $\subset \mathbb{R}^n$, $E = \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$.

$\mathcal{P} = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ polynômes $\subset \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$.

$\mathcal{P}$ sous-algèbre de $\mathcal{C}(A, \mathbb{R})$.

Définition : $(\mathcal{A}, +, \cdot, \times)$ algèbre sur $\mathbb{K}$, unitaire $\mathbb{1}_\mathcal{A}$.

$\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ est appelée sous-algèbre (unitaire) si elle contient $\mathbb{1}_\mathcal{A}$ et stable par $+, \cdot, \times$.

Théorème de Stone-Weierstrass :

Soit X un espace compact et $\mathcal{S}$ sous-algèbre unitaire de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Hypothèse : $\mathcal{S}$ "sépare les points" de X càd $\forall x, y \in X$, $\exists f \in \mathcal{S}$ tq $f(x) \neq f(y)$.

Conclusion : $\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Cas particulier :

$\mathcal{P} \subset \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ $\quad A$ compacte. $\quad x \neq y$ dans $A \subset \mathbb{R}^n$.

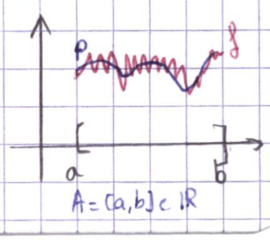
$\exists i \in \{1, \dots, n\}$ $x_i \neq y_i$.

$\ell_i(x) = x_i \Rightarrow$ les points sont séparés par les formes linéaires coordonnées.

$\overline{\mathcal{P}} = \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$

$\forall f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ je peux écrire $f = \lim_{k \to \infty}$ uniforme P_k $\quad P_k \in \mathcal{P}$.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists P \in \mathcal{P}$. $\quad \|f - P\|_\infty < \varepsilon$.



$A = [a, b] \subset \mathbb{R}$

Théorème de Stone-Weierstrass complexe :

X espace compact. $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{C}) = \{f : X \to \mathbb{C} \text{ continues}\}$

$\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in X} |f(x)|$.

On suppose : (i) $\mathcal{S}$ sous algèbre unitaire sur $\mathbb{C}$.

(ii) $\mathcal{S}$ stable par conjugaison : $\forall f \in \mathcal{S}, \bar{f} \in \mathcal{S}$.

(iii) $\mathcal{S}$ sépare les points : $\forall x, y \in X \ x \neq y \ \exists f \in \mathcal{S}$ tq $f(x) \neq f(y)$.

Conclusion : $\bar{\mathcal{S}} = \mathcal{C}(X,\mathbb{C})$.

Démonstration :

$\mathcal{S}_\mathbb{R} = \{\mathrm{Re}\, f,\ f \in \mathcal{S}\} \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$.

$\mathrm{Re}(f) = \frac{1}{2}(f + \bar{f}) \in \mathcal{S}$.

$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Re}(-if) \in \mathcal{S}$

$\mathcal{S}_\mathbb{R} = \mathcal{S} \cap \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ sous algèbre unitaire de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$.

$\mathcal{S}_\mathbb{R}$ sépare les points.

$f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{C})$.

$f = u + iv \quad u, v \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$.

$\underset{\text{th. } \mathbb{R}}{=} \lim (\underset{\mathcal{S}_\mathbb{R}}{\underset{\cap}{P_n}} + \underset{\mathcal{S}_\mathbb{R}}{\underset{\cap}{Q_n}}) \qquad P_n + iQ_n \in \mathcal{S}$. ∎

Corollaire : $\mathcal{C}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{C})$

$\mathcal{S} = \left\{ \sum\limits_{n=-N}^{+N} c_n e^{inx},\ c_n \in \mathbb{C} \right\}$ vérifie (i), (ii) et (iii).

Conclusion : $\bar{\mathcal{S}} = \mathcal{C}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.

IV. Théorie L^2 des séries de Fourier.

Définition :

$\mathcal{C}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{C}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues périodique de période $T\}$.

C'est un espace pré-hilbertien pour le produit scalaire sesquilinéaire :

$$\langle f, g \rangle \underset{\text{déf}}{=} \frac{1}{T}\int_0^T \overline{f(x)}\, g(x)\, dx = \frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx.$$

$\mathbb{R}/T\mathbb{Z} \simeq S^1$

$x \longmapsto e^{i\omega x} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$ "pulsation"