<u>Exercice</u> : majorer explicitement $d(x_n, a)$ en fonction de $\max_{1\leq i<j\leq m-1} d(x_i, x_j)$

et de λ = facteur de contraction de $\psi = \varphi^m$. ■

<u>Autre démonstration de complément 2 :</u>

Hyp : $\psi = \varphi^m$ vérifie $d(\varphi^m(x), \varphi^m(y)) \leq \lambda d(x,y)$.

Nouvelle distance $\tilde{d}(x,y) = \max_{0\leq i\leq m-1} \alpha^i d(\varphi^i(x), \varphi^i(y))$ avec $\alpha > 0$ bien choisi.

$\tilde{d}(x,y) \geq d(x,y)$ ($i=0$ $\varphi^0 = Id$ convention).

$$\begin{aligned}\tilde{d}(\varphi(x), \varphi(y)) &= \max_{0\leq i\leq m-1} \alpha^i d(\varphi^{i+1}(x), \varphi^{i+1}(y)) \\ &= \max_{\substack{1\leq j\leq m \\ (j=i+1)}} \alpha^{j-1} d(\varphi^j(x), \varphi^j(y)) \\ &\leq \max(\alpha^{-1}\tilde{d}(x,y), \alpha^{m-1} d(\varphi^m(x), \varphi^m(y))) \\ &\leq \max(\alpha^{-1}, \alpha^{m-1}\lambda)\, \tilde{d}(x,y).\end{aligned}$$

Choisissons α tel que $\alpha^{-1} = \alpha^{m-1}\lambda \Leftrightarrow \alpha^{-m} = \lambda \Leftrightarrow \alpha = \lambda^{-\frac{1}{m}}$.
(supposons $\lambda > 0$)

$$\tilde{d}(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \lambda^{1/m}\, \tilde{d}(x,y).$$

$\Rightarrow$ suite itérée (x_n) CV pour la distance $\tilde{d} \geq d$.

$\Rightarrow$ " " " " " " " d. ■

II. Espaces de Hilbert.

1). Définitions.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

<u>Définition</u> : On appelle <u>espace pré-hilbertien</u> un espace vectoriel E sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni d'un produit scalaire défini positif.

- produit scalaire <u>euclidien</u> sur $\mathbb{R}$.

$E \times E \to \mathbb{R}$ bilinéaire symétrique défini positif.
$(x,y) \mapsto \langle x,y \rangle$

- produit scalaire <u>hermitien</u> sur $\mathbb{C}$.

$E \times E \to \mathbb{C}$ sesquilinéaire défini positif.
$(x,y) \mapsto \langle x,y \rangle$.

$$\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y \rangle = \overline{\lambda_1}\langle x_1, y\rangle + \overline{\lambda_2}\langle x_2, y\rangle$$

$$\langle x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 \rangle = \mu_1 \langle x, y_1\rangle + \mu_2 \langle x, y_2 \rangle$$

défini positif : $\forall x \in E, x \neq 0 \Rightarrow \langle x, x\rangle = 0$.

Norme associée : $\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}$

(On sous-entend souvent que $\dim_{\mathbb{K}} E = +\infty$).

Cas de dimension finie : on parle d'espace euclidien ou hermitien.

Définition : On appelle espace de Hilbert un espace pré-hilbertien qui est complet pour la norme $\|x\| = \langle x,x \rangle$.

Rem: Si $(E,+,\cdot,\langle,\rangle)$ préhilbertien complexe alors $(E,+,\cdot,\mathrm{Re}\langle,\rangle)$ préhilbertien réel.
$\lambda \in \mathbb{R}$ (même norme).

Formule de polarisation et formule du parallélogramme :

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle$$
$$= \langle x,x \rangle + \langle y,y \rangle + \langle x,y \rangle + \langle y,x \rangle.$$
$$\|x+y\|^2 = \langle x,x \rangle + \langle y,y \rangle + 2\mathrm{Re}\langle x,y \rangle.$$

Pythagore : $x \perp y$ (par déf. $\langle x,y \rangle = 0$) $\Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

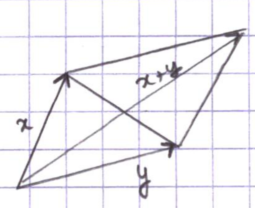
$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle x,y \rangle.$$

Formule du parallélogramme : $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

Rem: Dans un parallélogramme, $\sum(\text{diagonales})^2 = \sum(4 \text{ côtés})^2$

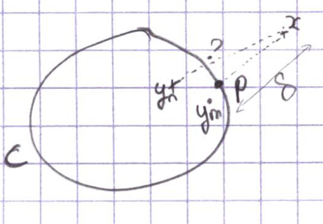
Formule de polarisation : $\mathrm{Re}\langle x,y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$

$$\langle x,y \rangle = \mathrm{Re}\langle x,y \rangle + i\,\mathrm{Im}\langle x,y \rangle.$$
$$= \mathrm{Re}\langle x,y \rangle - i\,\mathrm{Re}\langle x,iy \rangle.$$
$$\langle x,y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x+iy\|^2 + \|x-iy\|^2\right).$$



2) Théorème de projection.

E espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$, C partie convexe fermée non vide.



Rem: Si C est bornée et $\dim_{\mathbb{K}} E < \infty$, alors C est compacte, donc $\exists p \in C$ tq

$$\|x-p\| = \inf_{y \in C} \|x-y\| = \min_{y\in C} \|x-y\|$$

Théorème: Si C est convexe, fermée dans E, $\exists ! \, p \in C$ tq $\|x-p\| = \min_{y \in C} \|x-y\|$.
De plus, p est caractérisé par le fait que $\forall y \in C \setminus \{p\}$
angle $(x-p, y-p) \geq \frac{\pi}{2} \iff \mathrm{Re} \langle x-p, y-p \rangle \leq 0$.

Démonstration:

. Posons $\delta = \inf_{y \in C} \|x-y\|$.

$\exists$ suite $y_n \in C$ telle que $\delta^2 \leq \|x-y_n\|^2 \leq \delta^2 + \frac{1}{n}$ $n \geq 1$.

Montrons que (y_n) est une suite de Cauchy.

Parallélogramme appliqué à $x' = x-y_n$, $y' = x-y_m$

$(*)$ $\|2x - (y_n+y_m)\|^2 + \|y_m - y_n\|^2 = 2(\|x-y_n\|^2 + \|x-y_m\|^2) \leq 4\delta^2 + 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)$

$(**)$ $\|2x - (y_n+y_m)\|^2 = 4 \|x - \frac{y_n+y_m}{2}\|^2 \geq 4\delta^2$

$\frac{y_n+y_m}{2}$ = milieu de $[y_n, y_m] \in C$

$(*)$ et $(**)$ $\Rightarrow \|y_m - y_n\|^2 \leq 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)$

Fixons $\varepsilon > 0$ et prenons $n, m \geq N = E\left(\frac{4}{\varepsilon^2}\right) + 1$,

alors $\|y_n - y_m\|^2 \leq \varepsilon^2 \Rightarrow \|y_n - y_m\| \leq \varepsilon$.

E supposé complet $\Rightarrow p = \lim_{n\to\infty} y_n$ existe.

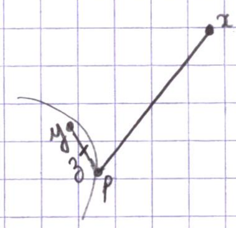
$\delta^2 \leq \|x-y_n\|^2 \leq \delta^2 + \frac{1}{n} \xrightarrow[\text{à la limite}]{} \|x-p\| = \delta$.

On a démontré l'existence, l'unicité résulte de l'unicité de la $\lim_{n\to\infty} y_n$

. Démontrons la caractérisation par l'angle.

Supposons angle $(x-p, y-p) < \frac{\pi}{2} \iff \mathrm{Re}\langle x-p, y-p\rangle > 0$.

Prenons $z \in [p, y]$ $z = p + t(y-p)$, $t \in [0,1]$. (avec $y \in C$).



$x - z = x - p - t(y-p)$

$\|x-z\|^2 = \|x-p\|^2 + t^2\|y-p\|^2 - 2t\langle x-p, y-p\rangle$.

$= \delta^2 - 2t \underbrace{\langle x-p, y-p\rangle}_{>0} + \underbrace{t^2\|y-p\|^2}_{=O(t^2)}$.

Pour $t > 0$ petit, on trouve $\|x-z\|^2 < \delta^2$, contradiction.

On a donc bien $\mathrm{Re}\langle x-p, y-p\rangle \leq 0, \forall y \in C$ (***).

Supposons inversement (***) satisfaite.

$$\|x-y\|^2 = \|(x-p)-(y-p)\|^2$$
$$= \|x-p\|^2 + \underbrace{\|y-p\|^2}_{\geqslant 0} - 2\,\mathrm{Re}\underbrace{\langle x-p, y-p\rangle}_{\geqslant 0}$$
$$\geqslant \|x-p\|^2.$$

Donc tout point y vérifiant (***) est tel que $\|x-y\| \geqslant \|x-p\|$,

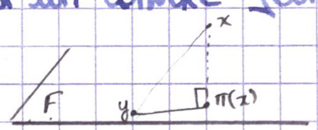
donc $p \in C$ est le point le plus proche. ■

<u>Notation</u> : $p = \pi(x) =$ "projection de x sur C".

<u>Cas particulier</u> :

F sous-espace vectoriel fermé de l'espace E.

F est un convexe fermé.



<u>Théorème</u> : $\exists !\ \pi(x) \in F$ tel que $\|x - \pi(x)\| = \min\limits_{y \in F} \|x-y\|$.

<u>Démonstration</u> :

Posons $p = \pi(x) \in F$ $\quad y = p+u,\ u \in F$.

$\mathrm{Re}\langle x-p, y-p\rangle = \mathrm{Re}\langle x-p, u\rangle \leqslant 0$, ceci a lieu $\forall u \in F$.

En remplaçant u par $-u$, je trouve $\mathrm{Re}\langle x-p, u\rangle \geqslant 0$.

$\mathrm{Re}\langle x-p, u\rangle = 0$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, je remplace u par iu et je trouve $\mathrm{Im}\langle x-p, u\rangle = 0$

$\Rightarrow \langle x-p, u\rangle = 0 \quad \forall u \in F$.

$x - \pi(x) = x - p \in F^{\perp}$, $x \in E$ quelconque.

$$x = \underset{\substack{\cap \\ F}}{\pi(x)} + \underset{\substack{\cap \\ F^{\perp}}}{(x - \pi(x))} \quad ■$$

<u>Théorème</u> : Si E est un espace de Hilbert et F un sous-espace fermé, on a une somme directe orthogonale. $E = F \oplus F^{\perp}$.

Démonstration :

Si $x \in F \cap F^{\perp} \Rightarrow x \perp x \Rightarrow \|x\|^2 = \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

(il ne peut pas y avoir de vecteur isotrope). ■

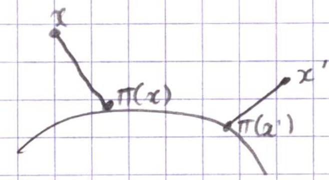
Corollaire 1: $\pi : E \longrightarrow F$ est la projection de E sur F parallèlement à $F^{\perp}$, qui est $\mathbb{K}$-linéaire.

Rem: Pour un convexe, π n'est pas linéaire en général.

Exercice : C convexe quelconque.

$\|\pi(x) - \pi(x')\| \leq \|x - x'\|$.

(inégalité triangulaire !).



Corollaire 2: F s.e.v fermé de E, alors $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

Démonstration :

On a toujours $(F^{\perp})^{\perp} \supset F$.

$(F^{\perp})^{\perp} = \{$vecteurs orthogonaux à $\underbrace{F^{\perp}}_{\text{orthogonaux à } F}\}$

$\supset F$ clair.

c'est de la pure logique !!.

$E = F \oplus F^{\perp}$ $\quad G = F^{\perp}$ fermé

$E = (F^{\perp})^{\perp} \oplus F^{\perp} = G^{\perp} \oplus G$. ■

Lemme : S s.e.v. de E : (i) $S^{\perp}$ est fermé.

(ii) $S^{\perp} = (\overline{S})^{\perp}$

Démonstration :

Cauchy-Schwarz. $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$.

$E \times E \xrightarrow{\Phi} \mathbb{K}$ $\qquad |||\Phi||| = 1$ (si $E \neq \{0\}$).

$(x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle$ $\qquad$ égalité quand $y = x \neq 0$

$\Rightarrow \Phi$ est continue sur $E \times E$.

(i) (x_n) suite dans $S^{\perp}$ qui converge vers $x \in E$.

$\forall y \in S \quad \langle x_n, y \rangle = 0$.

À la limite $\langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow x \in S^\perp$.

(ii) $S \subset \overline{S} \overset{\text{clair}}{\Rightarrow} (\overline{S})^\perp \subset S^\perp$.

Prenons $x \in S^\perp$ et $y \in \overline{S}$, $y = \lim_{n\to\infty} y_n$, $y_n \in S$.

$$\langle x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \underset{S^\perp}{\underset{\cap}{x}}, \underset{S}{\underset{\cap}{y_n}}\rangle = 0.$$

donc $x \in (\overline{S})^\perp$ ∎

Corollaire 3: Pour tout sev S du Hilbert E $(S^\perp)^\perp = \overline{S}$.

Démonstration :

$S^\perp = (\overline{S})^\perp \Rightarrow (S^\perp)^\perp = (\overline{S}^\perp)^\perp = \overline{S}$ ∎