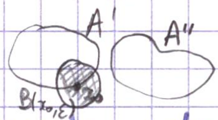
. Cas des parties ouvertes ou fermées.

A ouverte (resp. fermée)

Théorème : A connexe par arcs $\Rightarrow$ on ne peut partitionner $A = A' \cup A''$
A', A'' ouverts disjoints (resp. A', A'' fermés disjoints).

Démonstration :



On suppose par l'absurde qu'on peut partitionner $A = A' + A''$.

$f : A \to \mathbb{R}$

$A' \to \{0\}$

$A'' \to \{1\}$

Cas ouvert : f constante au voisinage de tout point donc continue.

Cas fermé : $x_0 \in A$ par exemple $x_0 \in A'$.

$x_0 \in \complement A''$ ouvert $\Rightarrow \exists B(x_0, \varepsilon) \subset \complement A''$.

$\Rightarrow A \cap B(x_0, \varepsilon) \subset A'$

$\Rightarrow f$ constante au voisinage de x_0, donc continue.

$f(A) = \{0, 1\}$ pas un intervalle ! $\lightning$. $\blacksquare$

Propriété de connexité :
A ouvert (resp. fermé) est dit connexe si on ne peut le partitionner en ouverts (resp. fermés) disjoints non vides.

III. Composantes connexes par arcs.

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et A une partie de X.

Définition : $\forall x, y \in A$, x est en relation avec y $(x R y) \iff$ on peut joindre x et y par un chemin continu $\gamma : [0,1] \to A$ $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$.

Rem : C'est une relation d'équivalence :

- réflexivité : $x R x$: $\gamma(t) = x$ constant.
- symétrie : $x R y \Rightarrow y R x$: $\gamma \rightsquigarrow \tilde{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$
- transitivité : $x R y$ et $y R z \Rightarrow x R z$

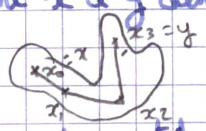
Définition: Les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ sont appelées les composantes connexes par arcs de la partie A. On obtient une partition $A = \coprod_{i \in I} A_i$.

Cas important: $X = E$, $\|.\|$ ev normé, $A = U$ ouvert.

Théorème: Soit U un ouvert d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$.

Il y a équivalence entre: (i) U est connexe par arcs.

(ii) $\forall x, y \in U$, $\exists$ "ligne brisée" reliant x à y dans U



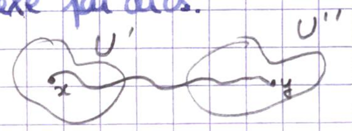
$x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$, $[x_i, x_{i+1}] \subset U$ pour $i = 0, \dots, n-1$.

(iii) U est connexe, càd n'admet pas de partition $U = U' \cup U''$ en ouverts disjoints non vides.

Démonstration:

- (ii) $\Rightarrow$ (i) clair: une ligne brisée donne un chemin continu.
- (i) $\Rightarrow$ (iii)

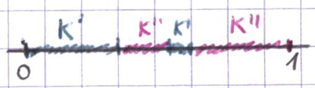
Supposons $U = U' \cup U''$ partition $U', U'' \neq \emptyset$ et néanmoins U connexe par arcs.



$\exists\, \gamma : [0,1] \longrightarrow U$ continue.
$t \longmapsto \gamma(t)$ avec $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

$[0,1] = \gamma^{-1}(U) = \underbrace{\gamma^{-1}(U') \cup \gamma^{-1}(U'')}_{\text{parties ouvertes disjointes de } [0;1]}$.

(attention: $[0, \varepsilon[$ est bien un ouvert de $[0,1]$).



$\gamma^{-1}(U') = \gamma^{-1}(\complement U'')$ est un fermé de $[0,1]$.

$\gamma^{-1}(U'') = \gamma^{-1}(\complement U')$ " " " de $[0,1]$.

$\Rightarrow \underset{K'}{\gamma^{-1}(U')}$ et $\underset{K''}{\gamma^{-1}(U'')}$ sont des compacts disjoints.

$\delta = d(K', K'') = \inf_{\substack{t' \in K' \\ t'' \in K''}} |t' - t''| > 0$ (atteint).

$0 \in K'$, $1 \in K''$

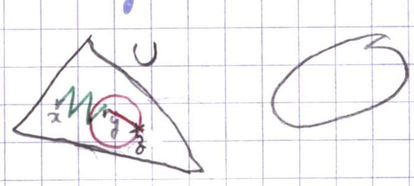
$m = \sup K' \leq 1 - \delta$ et $]m, m+\delta[$ non couvert par K' et K''. contradiction.

- (iii) $\Rightarrow$ (ii) $x, y \in U$

$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x$ et y peuvent être reliés par une ligne brisée.

C'est une relation d'équivalence.

Les classes d'équivalence sont des ouverts.



$C = \dot{x}$ ouvert ?

$y \in \dot{x}$ $\exists$ ligne brisée reliant x à y.

$\exists B(y, r) \subset U$ avec $r > 0$ (parce que U est ouvert).

$\forall z \in B(y, r)$, $[y, z] \subset B(y, r) \subset U$

donc $z \in C = \dot{x}$

donc $B(y, r) \subset C = \dot{x}$

donc C ouvert.

$U = \bigcup_{i \in I} C_i$ partition par des ouverts.

hyp (iii) $\Rightarrow$ une seule classe $\Rightarrow$ (ii). $\blacksquare$

ÉLÉMENTS D'ANALYSE FONCTIONNELLE

I. Théorème du point fixe.

Soit (E, d) un espace métrique complet. Soit A une partie fermée de E.
Rappel : ceci entraîne que A est complète.

Théorème : Soit $\varphi : A \to A$ une application contractante, càd par définition lipschitzienne de rapport $\lambda < 1$. Alors la suite itérée $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ avec un point initial quelconque $x_0 \in A$, converge vers un point fixe $a \in A$, càd $\varphi(a) = a$. De plus, ce point fixe est unique.

Démonstration :

Hypothèse : $d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \lambda\, d(x,y)$. "contraction".

- unicité du point fixe.

$a, b \in A$ tels que $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = b$.

$d(a,b) = d(\varphi(a), \varphi(b)) \leq \lambda\, d(a,b) \Rightarrow d(a,b) = 0 \overset{\text{séparation}}{\Rightarrow} a = b$.

- Montrons que toute suite itérée (x_n) est de Cauchy.

$d(x_n, x_{n+1}) = d(\varphi(x_{n-1}), \varphi(x_n)) \leq \lambda\, d(x_{n-1}, x_n)$ (à chq fois multiplié par λ)

Par récurrence, $d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda^n d(x_0, x_1)$.

Prenons $q > p$, $d(x_p, x_q) \underset{\text{triang}}{\leq} d(x_p, x_{p+1}) + \dots + d(x_{q-1}, x_q)$

$\leq (\lambda^p + \lambda^{p+1} + \dots + \lambda^{q-1})\, d(x_0, x_1)$

série géométrique $\lambda^p + \lambda^{p+1} + \dots + \lambda^{q-1} = \lambda^p(1 + \lambda + \dots + \lambda^{q-p-1}) = \lambda^p \dfrac{1-\lambda^{q-p}}{1-\lambda}$

$\leq \dfrac{\lambda^p}{1-\lambda}$

Pour $q > p$, $d(x_p, x_q) \leq \dfrac{\lambda^p}{1-\lambda} d(x_0, x_1)$. $(*)$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ tq $\dfrac{\lambda^p}{1-\lambda} d(x_0, x_1) \leq \varepsilon$ pour $p \geq N$, donc $q > p \geq N \Rightarrow d(x_p, x_q) \leq \varepsilon$.

A est complet $\Rightarrow (x_n)$ converge vers un point $a \in A$.

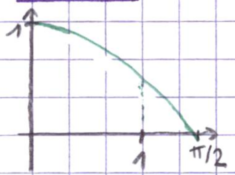
$x_{n+1} = \varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(a)$ car φ est continue.

Donc $a = \varphi(a)$. CQFD! $\blacksquare$

Complément 1 : vitesse de convergence.

Faisons $q \longrightarrow +\infty$ dans (*) : $d(x_p, a) \leq \frac{\lambda^p}{1-\lambda} d(x_0, x_1) \leq C\lambda^p$.

exemple : $\cos : [0,1] \longrightarrow [0,1]$.



$\cos(x) - \cos(y) \underset{\text{ac. finis}}{=} (x-y)(-\sin c)$

$|\cos x - \cos y| \leq \lambda (x-y)$ $\quad \lambda = \sup\limits_{c \in [0,1]} |\cos c| = \sin 1 \simeq 0{,}841 < 1$

$x_0 = 0$, $x_1 = \cos 0 = 1$

$\varepsilon \sim 10^{-s} \iff s = -\log_{10} \varepsilon$.

Nombre de décimales exactes $\sim -\log_{10}$ (erreur)

$-\log_{10}(x_p, a) \geq -\log_{10}(C\lambda^p)$

$\geq C' + p|\log_{10} \lambda|$

$\Rightarrow$ le nombre de décimales exactes croît linéairement avec le nombre d'itérations.

Complément 2 : Le théorème est encore vrai si on suppose seulement :

(i) $\varphi : A \longrightarrow A$ continue.

(ii) $\exists m \in \mathbb{N}^*$ $\varphi^m = \varphi \circ \dots \circ \varphi$ (m fois) est contractante.

Alors φ admet un unique point fixe a qui est aussi le point fixe de φ^m et $\forall x_0 \in A$ la suite itérée $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge vers a.

Démonstration :

Le résultat précédent appliqué à $\psi = \varphi^m$ donne un point fixe unique $\psi(a) = a$

$\varphi^m(a) = a \Rightarrow \underbrace{\varphi(\varphi^m(a))}_{\varphi(a)} = \varphi^{m+1}(a) = \varphi^m(\varphi(a)) = \psi(\varphi(a))$

$\Rightarrow \varphi(a)$ point fixe de ψ.

$\underset{\text{unicité pour } \psi}{\Rightarrow} \varphi(a) = a$.

$x_n = \varphi^n(x_0) = \varphi^{mq+r}(x_0) = (\varphi^m)^q(\varphi^r(x_0)) = \psi^q(\varphi^r(x_0))$

$\begin{cases} n = mq + r \\ 0 \leq r \leq m-1 \end{cases}$

Quand $n \to \infty$, $q \to +\infty$ $\varphi^r(x_0) \in \{x_0, x_1, \dots, x_{m-1}\}$.

$\psi^q(p_0) \longrightarrow a$ $\forall p_0$ en particulier pour $p_0 = \varphi^r(x_0)$.

Exercice : majorer explicitement $d(x_n, a)$ en fonction de $\max_{0 \leq i < j \leq m-1} d(x_i, x_j)$ et de λ = facteur de contraction de $\psi = \varphi^m$. ■

Autre démonstration de complément 2 :

Hyp : $\psi = \varphi^m$ vérifie $d(\varphi^m(x), \varphi^m(y)) \leq \lambda d(x,y)$.

Nouvelle distance $\tilde{d}(x,y) = \max_{0 \leq i \leq m-1} \alpha^i d(\varphi^i(x), \varphi^i(y))$ avec $\alpha > 0$ bien choisi.

$\tilde{d}(x,y) \geq d(x,y)$ ($i = 0$ $\varphi^0 = Id$ convention).

$$\tilde{d}(\varphi(x), \varphi(y)) = \max_{0 \leq i \leq m-1} \alpha^i d(\varphi^{i+1}(x), \varphi^{i+1}(y))$$
$$= \max_{\substack{1 \leq j \leq m \\ (j = i+1)}} \alpha^{j-1} d(\varphi^j(x), \varphi^j(y))$$
$$\leq \max(\alpha^{-1} \tilde{d}(x,y), \alpha^{m-1} d(\varphi^m(x), \varphi^m(y))).$$
$$\leq \max(\alpha^{-1}, \alpha^{m-1}\lambda)\, \tilde{d}(x,y).$$

Choisissons α tel que $\alpha^{-1} = \alpha^{m-1}\lambda \iff \alpha^{-m} = \lambda \iff \alpha = \lambda^{-\frac{1}{m}}$.
(supposons $\lambda > 0$)

$$\tilde{d}(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \lambda^{1/m} \tilde{d}(x,y).$$

$\Rightarrow$ suite itérée (x_n) CV pour la distance $\tilde{d} \geq d$.

$\Rightarrow$ " " " " " " " d. ■