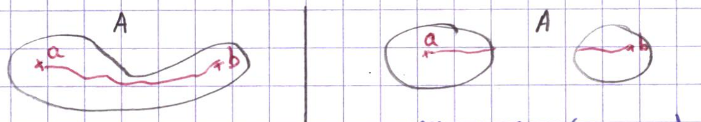
CONNEXITÉ ET APPLICATIONS

I. Définitions et premières propriétés.

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique.

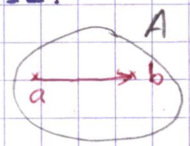
<u>Définition</u> : Une partie A de X est dite <u>connexe par arcs</u> si $\forall a, b \in A$ il existe une application <u>continue</u> $\gamma : [0;1] \longrightarrow A$ tq $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. ("chemin reliant a et b")



connexe (par arcs) | pas connexe (par arcs).

Exemples : $(E, \|\cdot\|)$ espace normé, $X = E$.

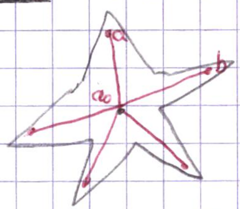
1) A partie convexe : $\forall a, b \in A$ $[a,b] \subset A$.



On prend $\gamma(t) = (1-t)a + tb = a + t(b-a)$.

2) A partie "étoilée" par rapport à un de ses points.

<u>Définition</u> : A est dite <u>étoilée</u> par rapport à $a_0 \in A$ si $\forall x \in A$ le segment $[a_0, x]$ est $\subset A$.



Si on prend $a, b \in A$ quelconques.

$\gamma : [0;1] \longrightarrow A$

$[0; \frac{1}{2}] \longrightarrow [a; a_0]$

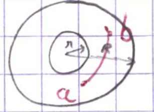
$[\frac{1}{2}; 1] \longrightarrow [a_0, b]$

$\gamma(t) = a + (2t)(a_0 - a) \quad t \in [0; \frac{1}{2}]$

$\gamma(t) = a_0 + \underbrace{(2t-1)}_{t' \in [0;1]}(b - a_0) \quad t \in [\frac{1}{2}; 1]$

<u>Rem</u> : étoilée $\Rightarrow$ connexe par arcs.

3) $E = \mathbb{R}^2 \quad x = (x_1, x_2) \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.



A = couronne $\{r < \|x\| < R\}$

coordonnées polaires : $\rho = \|x\|$

θ = angle polaire.

$\begin{cases} x_1 = \rho \cos\theta \\ x_2 = \rho \sin\theta \end{cases} \quad r < \rho < R.$

On veut relier $a(\rho_1, \theta_1)$ à $b(\rho_2, \theta_2)$.

$\gamma(t)$ point de coordonnées polaires $((1-t)\rho_1 + t\rho_2, (1-t)\theta_1 + t\theta_2)$.

$\gamma(t) = \Big(((1-t)\rho_1 + t\rho_2)\cos((1-t)\theta_1 + t\theta_2), ((1-t)\rho_1 + t\rho_2)\sin((1-t)\theta_1 + t\theta_2)\Big)$.

("spirale d'Archimède").

4) $\dim_{\mathbb{R}} E = 1$, $E \simeq \mathbb{R}$.

Théorème : Soit $A \subset \mathbb{R}$. Il y a équivalence entre :

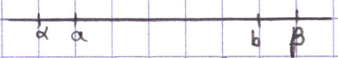
(i) A est un intervalle ($[\alpha;\beta]$, $[\alpha;\beta[$, $]\alpha;\beta[$, $]\alpha,\beta]$ avec éventuellement $\alpha = -\infty$ et $\beta = +\infty$ si borne ouverte).

(ii) A convexe : $\forall a, b \in A$ $[a,b] \subset A$.

(iii) A étoilé.

(iv) A connexe par arcs.

Démonstration :



- (i) $\underset{\text{évident}}{\Rightarrow}$ (ii) $\underset{\text{évident}}{\Rightarrow}$ (iii) $\underset{\text{évident}}{\Rightarrow}$ (iv)

- (iv) $\Rightarrow$ (ii)

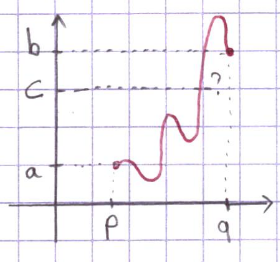
Prenons $a, b \in A$

$\exists\, \gamma$ continue $[0,1] \longrightarrow A$.

$\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

$A \supset \gamma([0,1]) \supset [a,b]$ théorème des valeurs intermédiaires.

Rappel : TVI



$f : [p,q] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(p) = a$ et $f(q) = b$.

Quitte à remplacer f par $-f$ on peut supposer $a < b$.

On procède par dichotomie en regardant $f\left(\frac{p+q}{2}\right)$.

$I_0 = [p,q]$

I_1 de longueur $\frac{1}{2}(q-p)$

$\vdots$

I_n de longueur $\frac{1}{2^n}(q-p)$ emboîtés.

$\bigcap I_n$ donne le point voulu.

- (ii) $\Rightarrow$ (i)

$\alpha = \inf A \in [-\infty; +\infty[$.

$\beta = \sup A \in]-\infty; +\infty[$.

À montrer : $]\alpha;\beta[\subset A$.

(on sait en effet $A\subset[\alpha;\beta]$).

Prenons $x\in]\alpha;\beta[$.

$x>\alpha=\inf A \Rightarrow \exists a\in A \quad \alpha\leq a< x$. pas un minorant

$x<\beta=\sup A \Rightarrow \exists b\in A \quad x<b\leq\beta$.

Hyp (ii) convexité $\Rightarrow [a,b]\subset A$

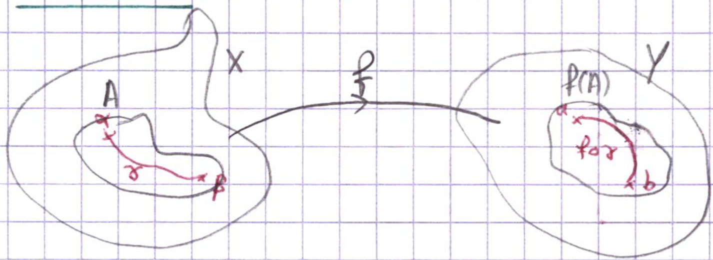
$\Rightarrow x\in]a,b[\subset A$

donc $]\alpha,\beta[\subset A$. ■

II. Propriétés des ensembles connexes par arcs.

Théorème : Soit $f : X\longrightarrow Y$ continue (entre espaces topologiques).
A connexe par arcs dans $X \Rightarrow f(A)$ connexe par arcs dans Y.

Démonstration :



Prenons $a,b\in f(A)$ quelconques.

$\exists\alpha\in A$ tel que $f(\alpha)=a$

$\exists\beta\in A$ tel que $f(\beta)=b$.

A connexe par arcs $\Rightarrow \exists\gamma : [0,1]\longrightarrow A$ continue tq $\gamma(0)=\alpha$ et $\gamma(1)=\beta$.

Je prends $\tilde{\gamma}=f\circ\gamma : [0,1]\xrightarrow{\gamma} A\xrightarrow{f} f(A)$.

$\tilde{\gamma}$ continue et relie $\tilde{\gamma}(0)=f\circ\gamma(0)=f(\alpha)=a$.

$\tilde{\gamma}(1)=f\circ\gamma(1)=f(\beta)=b$. ■

Corollaire : Si $f : X\longrightarrow\mathbb{R}$ continue.
A partie connexe par arcs de $X \Rightarrow f(A)$ intervalle.

Exemple : températures sur Terre.

$S = \{x^2+y^2+z^2 = R^2\}$ sphère de rayon R dans $\mathbb{R}^3$.

S connexe par arcs.

θ : longitude $\in [-\pi, \pi]$

φ : latitude $\in [-\pi/2 ; \pi/2]$.

$$\begin{array}{ccc} [-\pi,\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \xrightarrow{\Psi} & S \\ (\theta, \varphi) & \longmapsto & (R\cos\theta\cos\varphi, R\sin\theta\cos\varphi, R\sin\varphi). \end{array}$$

$[-\pi,\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ connexe par arcs (puisque convexe).

Ψ continue surjective.

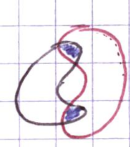
$S = \Psi\left([-\pi,\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ connexe par arcs.

$$\begin{array}{cccc} f : & S & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z) \end{array} \quad f \text{ continue}.$$

$f(S)$ forcément un intervalle.

. Intersections, réunions de connexes.

Proposition : A_i convexes $\Rightarrow A = \bigcap_{i\in I} A_i$ convexe.

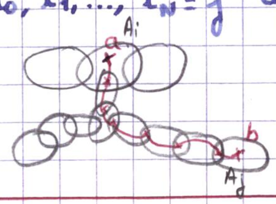


Démonstration :

$\forall i \quad a, b \in A_i \Rightarrow [a,b] \subset A_i$

$\Rightarrow [a,b] \subset A = \bigcap_{i\in I} A_i \quad \blacksquare$

Proposition : Soit $(A_i)_{i\in I}$ parties connexes par arcs et $A = \bigcup_{i\in I} A_i$.
Supposons $\forall i,j \in I$, il existe une "chaîne finie" $i = i_0, i_1, \dots, i_N = j$ d'indices $\in I$, tels que $A_{i_k} \cap A_{i_{k+1}} \neq \emptyset$ pour $k = 0, \dots, N-1$.
Alors A est connexe par arcs.

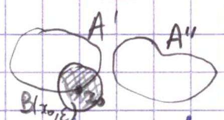


. Cas des parties ouvertes ou fermées.

A ouverte (resp. fermée)

Théorème : A connexe par arcs $\Rightarrow$ on ne peut partitionner $A = A' \cup A''$ A', A'' ouverts disjoints (resp. A', A'' fermés disjoints) non vides.

Démonstration :



On suppose par l'absurde qu'on peut partitionner $A = A' + A''$.

$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$

$A' \longrightarrow \{0\}$

$A'' \longrightarrow \{1\}$

Cas ouvert : f constante au voisinage de tout point donc continue.

Cas fermé : $x_0 \in A$ par exemple $x_0 \in A'$.

$x_0 \in \complement A''$ ouvert $\Rightarrow \exists B(x_0, \varepsilon) \subset \complement A''$.

$\Rightarrow A \cap B(x_0, \varepsilon) \subset A'$

$\Rightarrow f$ constante au voisinage de x_0, donc continue.

$f(A) = \{0, 1\}$ pas un intervalle ! $\lightning$. $\blacksquare$

Propriété de connexité :

A ouvert (resp. fermé) est dit connexe si on ne peut le partitionner en ouverts (resp. fermés) disjoints non vides.