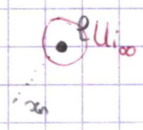
Définition: Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé. On dit qu'une partie A est compacte si pour tout recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de A, $U_i \in \mathcal{T}$, on peut extraire un recouvrement fini $A \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_N}$.

Exemple: (X, d) espace métrique.

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite convergeant vers $\ell \in X$.

$A = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{\ell\}$.



Supposons $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, U_i ouvert.

$\exists i_\infty$ tq $\ell \in U_{i_\infty}$ $\quad U_{i_\infty} \supset B(\ell, \varepsilon)$ $\quad \varepsilon > 0$.

$\exists N$ tq $\forall n \geq N$ $\quad x_n \in B(\ell, \varepsilon) \subset U_{i_\infty}$.

Restent les points $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$

$x_0 \in U_{i_0}, \dots, x_{N-1} \in U_{i_{N-1}}$.

$U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_{N-1}} \cup U_{i_\infty}$ recouvrement fini.

Théorème de Heine : Soient (X, d), (Y, d') espaces métriques.
A une partie compacte de X et $f : A \to Y$ continue.
Alors f est uniformément continue.
"Sur un compact, toute application continue est uniformément continue".

Démonstration 1:

Fixons $x \in A$, $\varepsilon > 0$.

$\exists U_x = B(x, \delta)$ boule ouverte tq $y \in U_x \cap A \Leftrightarrow d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Si $y, z \in U_x \cap A \Rightarrow \begin{cases} d(f(x), f(y)) < \varepsilon \\ d(f(x), f(z)) < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow d'(f(y), f(z)) < \varepsilon$.

$(U_x)_{x \in A}$ est un recouvrement ouvert de A. (dépend de ε).

Lemme de Lebesgue $\Rightarrow \exists \delta_\varepsilon > 0$ tq $\forall y \in A$ $\quad B(y, \delta_\varepsilon) \cap A \subset$ une des boules U_x.

Si $y, z \in A$ avec $d(y, z) < \delta_\varepsilon$, alors $y, z \in B(y, \delta_\varepsilon) \cap A \subset U_x$.

$\Rightarrow d'(f(y), f(z)) < 2\varepsilon$.

Démonstration 2 :

On veut montrer $\forall \varepsilon>0, \exists \delta_\varepsilon>0, \forall y,z\in A \quad d(y,z)<\delta_\varepsilon \Rightarrow d'(f(y),f(z))<\varepsilon$.

Supposons ceci faux

$\exists \varepsilon>0, \forall \delta>0 \ \exists y,z\in A \quad d(y,z)<\delta \Rightarrow d'(f(y),f(z))\geq\varepsilon$.

Fixons un tel $\varepsilon>0$.

$\delta = 2^{-n} \rightsquigarrow y_n, z_n\in A$ tq $d(y_n,z_n)<2^{-n} \Rightarrow d'(f(y_n),f(z_n))\geq\varepsilon$.

$(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow$ sous-suite $(y_{n_p})_{p\in\mathbb{N}} \longrightarrow x$

donc $(z_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers x. (A compacte).

f continue en $x \Rightarrow \exists \eta>0 \quad \left.\begin{matrix} y\in A \\ d(y,x)<\eta \end{matrix}\right) \Rightarrow d'(f(y),f(x))<\frac{\varepsilon}{3}$.

$\left.\begin{matrix} y,z\in A \\ d(y,x)<\eta \\ d(z,x)<\eta \end{matrix}\right) \Rightarrow d'(f(y),f(z))<\frac{2\varepsilon}{3}$.

Pour $p\geq p_0$, on a $\left.\begin{matrix} d(y_{n_p},x)<\eta \\ d(z_{n_p},x)<\eta \end{matrix}\right) \Rightarrow d'(f(y_{n_p}),f(z_{n_p}))<\frac{2\varepsilon}{2}$.

contradiction avec $d(f(y_n),f(z_n))\geq\varepsilon$. ∎

V. Compacité et homéomorphisme.

Théorème : Soit (X,d) et (Y,d') espaces métriques.
Si X est compact et $f: X\to Y$ continue bijective
alors $f^{-1}: Y\to X$ continue.

Rem : Faux en général si X non compact.

$X=[0;2\pi[\xrightarrow{f} S^1=\{z\in\mathbb{C} ; |z|=1\}$

$\theta \longmapsto f(\theta)=e^{i\theta}$

$\longleftarrow z$

f^{-1} non continue en $z=1$.

Démonstration :

Prenons A fermée dans X (compact).

Alors A compacte $\Rightarrow f(A)$ compacte $\Rightarrow f(A)$ fermée.

Posons $g=f^{-1}$

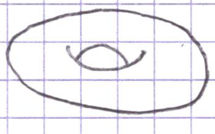
A fermée dans $X \Rightarrow g^{-1}(A)=(f^{-1})^{-1}(A)=f(A)$ fermée $\Rightarrow g$ continue ∎

Exemple :

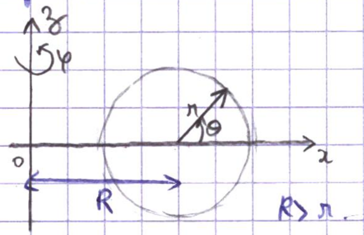
$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow S^1 \quad \text{homéomorphisme.}$$
$$\dot{\theta} \longmapsto e^{i\theta}$$

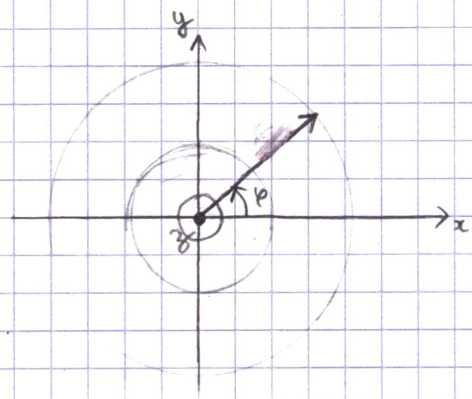
$$\mathbb{R} \xrightarrow{p} \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$
$$\theta \longmapsto \dot{\theta}$$

$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} = p([0;2\pi])$ compact.



"tore"





Dans le plan Oxz $\begin{cases} x = R + r\cos\theta \\ z = r\sin\theta \end{cases}$

équation paramétrique du tore $\begin{cases} x = (R + r\cos\theta)\cos\varphi \\ y = (R + r\cos\theta)\sin\varphi \\ z = r\sin\theta \end{cases}$

$$f : \left(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\right)^2 \longrightarrow T$$
$$(\theta, \varphi) \longmapsto (x,y,z) = ((R+r\cos\theta)\cos\varphi, (R+r\cos\theta)\sin\varphi, r\sin\theta).$$

f continue, bijective.

$\Rightarrow f$ homéomorphisme.

VI. Compacité en dimension infinie.

> **Théorème :** Soit (X,d) espace métrique complet.
>
> $A = \overline{\bigcup_{p\in\mathbb{N}} A_p}$ $\quad A_p$ compactes, $A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_p \subset \dots$
>
> $\delta_p = \sup_{x\in A} d(x, A_p)$. On suppose $\delta_p \longrightarrow 0$.
>
> Alors A est compacte.

Démonstration :

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite dans A.

$\exists\, x_{n,p} \in A_p$ tq $d(x_n, x_{n,p}) = \inf_{y\in A_p} d(x_n, y) \leq \delta_p$.

(l'inf de la distance est atteint sur le compact A_p).

$(x_{n,p})_{n\in\mathbb{N}}$ suite dans A_p.

$p=0$ sous-suite $S_0 \subset \mathbb{N}$ infinie $\quad (x_{n,0})_{n\in S_0} \longrightarrow l_0 \in A_0.$

$p=1$ sous-suite $\underset{\text{infinie}}{S_1} \subset S_0$ $(x_{n,1})_{n\in S_1} \longrightarrow \ell_1 \in A_1$.

$\vdots$

p $S_p \subset S_{p-1}$ $(x_{n,p})_{n\in S_p} \longrightarrow \ell_p \in A_p$.

$(\ell_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Prenons $p>q$ $d(x_n, x_{a_p}) \leqslant \delta_p \leqslant \delta_q$.

$d(x_n, x_{a_q}) \leqslant \delta_q$

$\overset{\text{triang}}{\Longrightarrow} d(x_{a_p}, x_{a_q}) \leqslant 2\delta_q$.

$n\in S_p$ $x_{n,p} \longrightarrow \ell_p$ $x_{n,q} \longrightarrow \ell_q$.

donc $d(\ell_p, \ell_q) \leqslant 2\delta_q \xrightarrow[q\to\infty]{} 0$

X complet et A fermé $\Rightarrow \ell = \lim\limits_{p\to\infty} \ell_p \in A$ existe. et on a $d(\ell, \ell_q) \leqslant 2\delta_q$.

$\ldots \subset S_p \subset S_{p-1} \subset \ldots \subset S_0 \subset \mathbb{N}$
(infinies).

$s_p = p^{\text{ième}}$ élément de S_p $n = s_p$.

$d(x_{s_p}, x_{s_p,p}) \leqslant \delta_q$

Fixons $\varepsilon>0$, choisissons q tq $\delta_q < \varepsilon$.

$(x_{n,q}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell_q$

$\exists p_0$ $p\geqslant p_0 \Rightarrow d(x_{s_p,q}, \ell_q) < \varepsilon$.

$d(x_{s_p,q}, x_{s_p}) \leqslant \delta_q \leqslant \varepsilon$.

$$\left.\begin{array}{l} p\geqslant p_0 \Rightarrow d(x_{s_q}, \ell_q) \leqslant 2\varepsilon. \\ d(\ell, \ell_q) \leqslant 2\delta_q \leqslant 2\varepsilon \end{array}\right) \Rightarrow d(x_{s_p}, \ell) < 4\varepsilon.$$

$(x_{s_p}) \longrightarrow \ell \in A$ CQFD ?!?

Exemple : "hyperparallélépipède".

$\ell^\infty(\mathbb{N}) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \,;\, x_n \in \mathbb{R}\}$ suites bornées.

$x = (x_n)$ $\|x\|_\infty = \sup |x_n|$

$R_0, R_1, \ldots, R_n$ "côtés successifs" $R_n \to 0$

$P = \{x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \,;\, 0 \leqslant x_n \leqslant R_n\}$

$= \prod\limits_{n=0}^{\infty} [0, R_n] \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$.

$A_p = \{(x = (x_0, x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0, \ldots) \quad 0 \leqslant x_n \leqslant R_n\}$

contenu dans un sev de dim $p+1$

A_p fermé borné $\Rightarrow A_p$ compact.

$P = \overline{\bigcup A_p}$

$x = (x_0, \dots, x_n, \dots)$

$x_p = (x_0, \dots, x_p, 0, \dots, 0)$

$d_p(x, x_p) = \|(0, \dots, 0, x_{p+1}, \dots, x_n, \dots)\|_\infty$

$= \sup_{n \geqslant p+1} |x_n| \leqslant \sup_{n \geqslant p+1} R_n \xrightarrow[p \to \infty]{} 0$

$\max_{x \in P} d(x, A_p) \leqslant \delta_p = \sup_{n \geqslant p+1} R_n \xrightarrow[p \to \infty]{} 0$

Thm précédent + $\ell^\infty(\mathbb{N})$ complet $\Rightarrow$ un hyperparallélépipède dont les côtés tendent vers 0 est compact.