III. Compacité et espaces normés.

Théorème : Sur un ev de dimension finie E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, toutes les normes sont équivalentes.

Démonstration :

$n = \dim_{\mathbb{R}} E \Rightarrow E \simeq \mathbb{R}^n$

$(n = \dim_{\mathbb{C}} E \Rightarrow E \simeq \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n})$.

$(e_1, \dots, e_n)$ base canonique de $\mathbb{R}^n$.

$x \longmapsto N(x)$ norme euclidienne

$x \longmapsto \|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

Lemme : N est continue pour $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$.

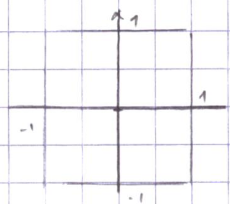
Dém : $|N(x) - N(x_0)| \leq N(x - x_0) = N\left(\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - x_{i,0}) e_i\right)$

$|N(x) - N(x_0)| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - x_{i,0}| N(e_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} N(e_i) \|x - x_0\|_\infty$.

Par rapport à $\|\cdot\|_\infty$, N est lipschitzienne de constante $\lambda = \sum\limits_{i=1}^{n} N(e_i)$

En particulier, pour $x_0 = 0$, $|N(x)| \leq \lambda \|x\|_\infty$.

Regardons $S = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty = 1\}$ "sphère unité".



$S = \partial[-1;1]^n$, c'est une partie compacte de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$.

$\inf\limits_{x \in S} N(x) = m = \underset{x_0 \in S}{N(x_0)} > 0$

$\|x\|_\infty = 1 \Rightarrow N(x) \geq m$.

$\frac{1}{\|x\|_\infty} x$ de norme $\|\cdot\|_\infty$ égale à 1. $\Rightarrow N\left(\frac{1}{\|x\|_\infty} x\right) \geq m$

$\Rightarrow \frac{1}{\|x\|_\infty} N(x) \geq m$.

$\Rightarrow N(x) \geq m \|x\|_\infty$.

$\underbrace{m}_{\inf\limits_S N} \|x\|_\infty \leq N(x) \leq \underbrace{\lambda}_{\text{constante de lipschitz} = \sum_{i=1}^{n} N(e_i)} \|x\|_\infty$ ∎

Rem : même raisonnement avec $\|\cdot\|_2 = \sqrt{\sum |x_i|^2}$, et alors S = sphère ordinaire, elle est aussi compacte.

Corollaire 1 : Soient E, F des espaces normés. Si $\dim E < \infty$, on a $\mathcal{L}(E,F) = \mathcal{L}c(E,F)$, càd toute application linéaire $E \to F$ est continue.

Démonstration :

$E \simeq \mathbb{K}^n$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Il suffit de le démontrer pour $(\mathbb{K}^n, N)$ avec une norme N quelconque.

$(e_1, \dots, e_n)$ base de E, $\ell \in \mathcal{L}(E,F)$.

$\|\ell(x)\|_F = \|\ell(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i)\|_F \leq \sum_{i=1}^{n} \|\ell(e_i)\|_F \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$,

donc ℓ est continue pour $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$.

Or $N \sim \|\cdot\|_\infty$ donc $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq C N(x)$.

$\Rightarrow \|\ell(x)\|_F \leq C \sum_{i=1}^{n} \|\ell(e_i)\|_F \, N(x)$ ■

Corollaire 2 : Dans un espace normé E de dim finie, les parties compactes sont les fermés bornés.

Démonstration :

$(E, \|\cdot\|) \simeq (\mathbb{K}^n, N)$. ■

Question : Que se passe-t-il en dimension infinie ?

Théorème : Dans un espace normé E quelconque, tout sous-espace $S \subset E$ de dimension finie est complet, donc fermé dans E.

Démonstration :

Dans $(E, \|\cdot\|_E)$ on regarde $(S, \|\cdot\|_E) \simeq (\mathbb{K}^n, N)$.

$N \sim \|\cdot\|_\infty$. $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ complet $\Rightarrow (\mathbb{K}^n, N)$ complet.

$\Rightarrow (S, \|\cdot\|_E)$ complet.

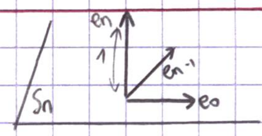
- Soit (x_k) une suite dans S, $x = \lim_{x \to \infty} x_k \in E$.

(x_k) CV $\Rightarrow (x_k)$ de Cauchy $\Rightarrow (x_k)$ converge dans $S \Rightarrow x \in S$.

Donc S est fermé. ■

Proposition : Soit E un espace normé de dimension infinie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Alors il existe une suite de vecteurs $\mathbb{K}$-linéairement indépendants $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que : (i) $\|e_n\| = 1$

(ii) Si $S_n = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$ de dim n, alors $d(e_n, S_n) = 1$.



Démonstration :

Construisons e_n par récurrence sur n.

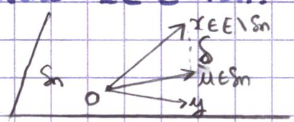
- $n = 0$, $E \neq \{0\}$, je prends $x \neq 0$ et $e_0 = \frac{1}{\|x\|} \cdot x$.

On a bien $\|e_0\| = 1$.

- Supposons $n \geqslant 1$, et $e_0, e_1, \dots, e_{n-1}$ déjà construits.

$\dim E = +\infty \Rightarrow S_n \subsetneq E$.

Prenons $x \in E \setminus S_n$.



Soit $\delta = d(x, S_n) = \inf_{y \in S_n} \|x - y\|$.

$\delta > 0$ (car S_n est fermé, et $x \notin \overline{S_n} = S_n$)

$y = 0 \in S_n$ donc $\delta \leqslant \|x\|$.

Pour réaliser l'inf, il est inutile de regarder les $y \in S_n$ tels que $\|x - y\| > \|x\|$.

Il suffit de regarder les $y \in S_n$ tels que $\|x - y\| \leqslant \|x\| \Rightarrow \|y\| \leqslant 2\|x\|$.

$\Rightarrow \|y\| \in B_f(0, 2\|x\|)$.

$\delta = \inf_{y \in S_n} \|x - y\| = \inf_{y \in S_n \cap B_f(0, 2\|x\|)} \|x - y\|$.

$K_n = S_n \cap B_f(0, 2\|x\|)$ fermé borné de $S_n \simeq \mathbb{K}^n$.

K_n est un compact.

$y \longmapsto \|x - y\|$ lipschitzienne de rapport 1, donc continue.

Donc elle atteint son inf en un point $u \in K_n$.

On a $\delta = \|x - u\|$

On prend $e_n = \frac{1}{\delta}(x - u)$.

- $\|e_n\| = \frac{1}{\delta}\|x - u\| = 1$.

* $d(e_n, S_n) \leq d(e_n, 0) = \|e_n\| \leq 1$.

$z \in S_n$ $\quad \|e_n - z\| = \left\| \frac{1}{\delta}(x-u) - z \right\|$

$$= \frac{1}{\delta} \| x - \underbrace{(u + dz)}_{= y \in S_n} \|$$

$\|x - y\| \geq d(x, S_n) = \delta \Rightarrow \|e_n - z\| \geq 1$.

$d(e_n, S_n) = \inf_{z \in S_n} \|e_n - z\| \geq 1$. ∎

Théorème de Riesz : Dans un espace normé de dimension infinie E, les boules fermées $B_f(x_0, R)$ ne sont jamais compactes (si $R > 0$).

Démonstration :

Par translation et dilatation, il suffit de le voir pour $B_f(0,1)$.

Or, la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la proposition précédente vérifie $e_n \in B_f(0,1)$

et pour $n > p$, $d(e_n, e_p) \geq d(e_n, S_n) \geq 1$

$\Rightarrow$ pas de sous-suite CV

$\Rightarrow$ $B_f(0,1)$ pas compacte. ∎

Théorème de Riesz (reformulation équivalente) :

Si un espace normé a sa boule fermée qui est compacte, il est de dimension finie.

IV. Caractérisation topologique de la compacité

Soit (X, d) un espace métrique.

Définition : On appelle recouvrement ouvert d'une partie A de X une famille d'ouverts $(U_i)_{i \in I}$ tels que $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.

Lemme de Lebesgue : Soit K une partie compacte recouverte par des ouverts $(U_i)_{i \in I}$. Alors il existe $\delta > 0$ (appelée "constante de Lebesgue" du recouvrement $(U_i)_{i \in I}$) telle que $\forall x \in K, \exists i \in I$ tq $K \cap B(x, \delta) \subset U_i$.

Démonstration :

Par l'absurde.

$\forall \delta > 0, \exists x \in K, \forall i \in I, K \cap B(x, \delta) \not\subset U_i$.

Prenons $\delta = 2^{-n}$,

$\exists x_n \in K$ tq $\forall x \in I$, $K \cap B(x_n, 2^{-n}) \not\subset U_i$.

K compact $\Rightarrow \exists$ sous-suite $(x_{n_s})_{s \in \mathbb{N}} \xrightarrow[s \to \infty]{} x \in K$

$K \subset \bigcup U_i$ donc $\exists i \in I$ tq $x \in U_i$

U_i ouvert $\Rightarrow \exists \delta > 0$ tq $B(x, \delta) \subset U_i$

$x_{n_s} \xrightarrow[s \to \infty]{} x$ donc $\exists s_0$ tq $s \geqslant s_0 \Rightarrow d(x_{n_s}, x) < \frac{\delta}{2}$.

Pour $s \geqslant s_0$, $B(x_{n_s}, \frac{\delta}{2}) \subset B(x, \delta) \subset U_i$

Prenons s tq $2^{-n_s} \leqslant \frac{\delta}{2}$.

Alors $K \cap B(x_{n_s}, 2^{-n_s}) \subset B(x_{n_s}, \frac{\delta}{2}) \subset U_i$ contradiction ! ■

Théorème de Borel-Lebesgue :

Soit K une partie compacte et $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de K.

Alors, on peut extraire un recouvrement fini $(U_{i_1}, \dots, U_{i_N})$:

$K \subset U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_N}$.

Démonstration :

Lemme de Lebesgue $\Rightarrow \exists \delta > 0$ tq $\forall x \in K, \exists i \in I$ tq $K \cap B(x, \delta) \subset U_i$

Prenons $x_1 \in K$ quelconque, $\exists i_1$ tq

$B(x_1, \delta) \subset U_{i_1}$.

Si U_{i_1} recouvre K, on a fini.

Sinon, il existe $x_2 \in K \setminus U_{i_1}$.

$\exists i_2$ tq $B(x_2, \delta) \subset U_{i_2}$.

On construit $x_n \in K \setminus (U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_{n-1}})$

et $i_n \in I$ tq $B(x_n, \delta) \subset U_{i_n}$.

Supposons que ça ne s'arrête jamais, càd $K \setminus (U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_{n-1}}) \neq \emptyset \ \forall n$.

Pour $n > p$, $B(x_p, \delta) \subset U_{i_p}$ et $x_n \in K \setminus (U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_p} \cup \dots \cup U_{i_{n-1}})$.

$\Rightarrow x_n \notin B(x_p, \delta) \Rightarrow d(x_n, x_p) \geq \delta$.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'aurait pas de sous-suite CV, contradiction $\lightning$ CQFD ∎

Proposition (caractérisation topologique des compacts) :

Soit (X, d) un espace métrique et A une partie de X.

Il y a équivalence entre :

(i) A est compacte [déf : prop. de Bolzano - Weierstrass].

(ii) Pour tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de A, on peut extraire un recouvrement fini (prop. de Borel-Lebesgue).

(iii) Pour toute famille de fermés $(F_i)_{i\in I}$ de X telles que les intersections finies $A \cap F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_N} \neq \emptyset$ alors $A \cap \bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.

(iv) Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés telle que $F_n \cap A \neq \emptyset$ alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \cap A \neq \emptyset$.

Démonstration :

- (i) $\Rightarrow$ (ii) c'est le théorème de Borel - Lebesgue.
- (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\quad F_i = \complement_X U_i \Leftrightarrow U_i = \complement_X F_i$

$$\bigcap_{i\in I} F_i = \bigcap_{i\in I} (\complement_X U_i) = \complement_X \left(\bigcup_{i\in I} U_i\right)$$

$$A \cap \underbrace{\bigcap_{i\in I} F_i}_{E} = \emptyset \Leftrightarrow A \subset \complement_X E$$

$$\Leftrightarrow A \subset \bigcup_{i\in I} U_i .$$

(ii) et (iii) sont équivalentes par contraposition et passage au complémentaire).

- (iii) $\Rightarrow$ (iv) pour des fermés emboîtés.

$F_{j_1} \cap \dots \cap F_{j_N} = F_j \quad j = \max(j_1, \dots, j_N)$.

(iv) cas particulier de (iii).

- (iv) $\Rightarrow$ (i)

Prenons (x_n) une suite dans A.

$\text{Val-adh}(x_n) = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} F_N$.

$F_N = \overline{\{x_n, n \geq N\}}$ suite décroissante de fermés

$A \cap F_N \ni x_n$ donc pas vide.

(iv) $\Rightarrow A \cap \bigcap_{N\in\mathbb{N}} F_N = A \cap \text{Val-adh}(x_n) \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, v \in A$ qui est une valeur d'adhérence $\Rightarrow$ (i) ∎