21/11/2014

CHAP. 4 : COMPACITÉ ET APPLICATIONS À L'ANALYSE

I. Définitions et propriétés générales

Def: Soit (X,d) un espace métrique et $A \subset X$. On dit que A est compacte si A satisfait la propriété de Bolzano-Weierstrass. Pour toute suite (x_n) dans A il existe une valeur d'adhérence $v \in A$, ie il existe une sous-suite (x_{n_k}) qui converge vers une limite $l \in A$.

Propriétés des compacts

1) A compacte $\Rightarrow$ A bornée

Dem: A non bornée $\Rightarrow$ A non compacte ?

$x_0 \in A \quad \exists x_1 \in A \quad d(x_0, x_1) \geq 1$

Par récurrence sur n, $\exists x_{n+1} \in A$ tq $d(x_{n+1}) \in A$ tel que $d(x_{n+1}, x_0) \geq d(x_n, x_0) + 1$

Sinon $\forall x \in A \quad d(x, x_0) < d(x_n, x_0) + 1$

$(\Rightarrow A \subset B(x_0, R) \quad R = d(x_n, x_0) + 1 \Rightarrow A$ bornée$)$

Si $i < j \quad d(x_0, x_j) \geq d(x_0, x_i) + (j-1)$

$\Rightarrow d(x_i, x_j) \geq |d(x_0, x_j) - d(x_0, x_i)| \geq j - i \geq 1$

$\Rightarrow$ il ne peut pas exister de sous-suite (x_{n_k}) convergente ∎

2) A compacte $\Rightarrow$ A fermée

Dem: Prenons $x \in \bar{A}$: $x = \lim_{n \to \infty} x_n$, $x_n \in A$

$\exists$ sous-suite $x_{n_k} \longrightarrow l \in A$

Unicité de la limite donc $x = l \in A$. donc $\bar{A} = A$ ∎

A compacte $\Rightarrow$ A fermée et bornée.

3) Soit A partie compacte et $B \subset A$. Alors :
B compacte $\Leftrightarrow$ B fermée

<u>Dem</u> : Il faut mq $\left.\begin{array}{l} A \text{ compacte} \\ B \text{ fermée} \subset A \end{array}\right\} \Rightarrow B$ compacte.

Soit (x_n) suite dans B.
A compacte $\Rightarrow \exists$ sous-suite $x_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} l \in A$.
$x_{n_k} \in B \Rightarrow l \in \overline{B} = B$ car B fermée ■

4) A, B compactes $\Rightarrow A \cup B$ compacte.

<u>Dem</u> : Soit (x_n) suite $x_n \in A \cup B$.
$I = \{n \in \mathbb{N} ; x_n \in A\}$ $\quad$ $J = \{n \in \mathbb{N} ; x_n \in B \setminus A\}$
$\mathbb{N} = I \cup J$ partition des entiers naturels (de $\mathbb{N}$)
On a donc I infinie ou J infinie (ou les deux !)
Supposons I infinie $I = \{i_0 < i_1 < \dots < i_k < \dots\}$
$(x_{i_k})_{k \in \mathbb{N}}$ suite dans A
A compacte $\Rightarrow \exists$ sous-suite $x_{i_{k_s}} \xrightarrow[s \to +\infty]{} l \in A$

C'est une sous-suite qui converge dans A et donc dans $A \cup B$.
[Raisonnement analogue pour J infinie : $x_{j_{k_s}} \xrightarrow[s \to +\infty]{} l \in B$] ■

4') $A_1, \dots, A_p$ compactes $\Rightarrow A_1 \cup \dots \cup A_p$ compacte.

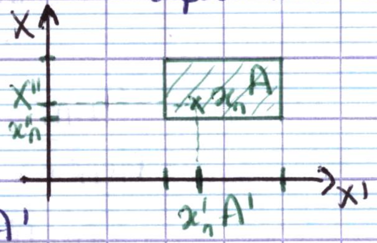
<u>Remarque</u> : Ça ne marche pas pour une réunion infinie
$A_i = [i ; i+1]$ $\quad i \in \mathbb{N}$
$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = [0 ; +\infty[$ non bornée

5) $(X_1, d_1), \dots, (X_p, d_p)$ espaces métriques $\quad X = X_1 \times \dots \times X_p$.
$d((x_1, \dots, x_p), (y_1, \dots, y_p)) = \max_{1 \leq i \leq p} (d_i(x_i, y_i))$ (C'est bien une

distance et X est appelé espace métrique produit.)

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \text{ compacte } \subset X_1 \\ \vdots \\ A_p \text{ compacte } \subset X_p \end{array}\right\} \Rightarrow A_1 \times \dots \times A_p \text{ compacte dans } X_1 \times \dots \times X_p.$$

<u>Dem pour $p=2$</u> : $X = X' \times X''$ produit de 2 espaces métriques
$x = (x', x'')$



$A = A' \times A''$ avec A', A'' compactes.
$x_n = (x_n', x_n'')$
$\exists$ sous-suite (x'_{n_k}) qui cv vers $l' \in A'$
$u_k'' = x''_{n_k} \in A''$ $\exists$ sous-suite $\underset{= x''_{n_{k_s}}}{u''_{k_s}} \xrightarrow[s \to +\infty]{} l'' \in A''$

$$x_{n_{k_s}} = (x'_{n_{k_s}}, x''_{n_{k_s}}) \xrightarrow[s \to +\infty]{} (l', l'') \in A' \times A'' \blacksquare$$

<u>Observation</u> : Dans $\mathbb{R}$ tout intervalle fermé borné $[a,b]$ est compact.
$x_n \in [a,b]$ $v = \limsup_{n \to \infty} v_n \in [a,b]$ est une valeur d'adhérence

Théorème : Dans $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$) les parties compactes sont les parties fermées bornées.

<u>Dem</u> : • A compacte $\Rightarrow$ A fermée bornée (vrai dans tout espace métrique)
• $A \subset \mathbb{R}^n$ fermée bornée d = distance euclidienne
$A \subset \underbrace{B_f(0,R)}_{\text{boule fermée}} \subset \underbrace{[-R;R]^n}_{\text{cube}}$

$[-R;R]$ compact $\Rightarrow [-R;R]^n$ cube compact.
A fermée $\subset$ compact $\underset{(3)}{\Rightarrow}$ A compacte $\blacksquare$

II - Relations entre compacité et continuité

Théorème : Soit $f : X \longrightarrow Y$ application continue entre espaces métriques.
A compacte dans $X \Rightarrow f(A)$ compacte dans Y

Dem : $B = f(A)$ compacte ?
Prenons $y_n \in B$.
On choisit $x_n \in A$ tel que $f(x_n) = y_n$ (axiome du choix)
$\exists$ sous suite $x_{n_k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} l \in A$
$y_{n_k} = f(x_{n_k}) \xrightarrow[k \to +\infty]{} f(l) \in B = f(A)$.
par continuité de f ∎

Conséquence 1 : A compacte $\Rightarrow f(A)$ fermée bornée.

Cas particulier : $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue
Alors f est bornée et $f([a,b])$ est fermée.

Conséquence 2 : $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continue
Prenons A partie compacte de X non vide
$\exists x_0 \in A$ tq $\sup_{x \in A} f(x) = f(x_0) = \max_{x \in A} f(x)$

$\exists x_1 \in A$ tq $\inf_{x \in A} f(x) = f(x_1) = \min_{x \in A} f(x)$

Dem : $B = f(A)$ partie fermée bornée des réels
$\left.\begin{array}{l} M = \sup B \\ m = \inf B \end{array}\right\}$ existent car B bornée non vide
$\forall n \ \exists y_n \in B \quad M - \frac{1}{n} < y_n \leq M \quad y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} M \Rightarrow M \in B$.

$\exists z_n \in B \quad m \leq z_n < m + \frac{1}{n} \quad z_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} m \Rightarrow m \in B$
en fait $m, M \in \partial B$.

$\exists x_0 \in A$ tq $M = f(x_0)$
$\exists x_1 \in A$ tq $m = f(x_1)$ ■

III Compacité et espaces normés

Théorème : Sur un ev de dim finie E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, toutes les normes sont équivalentes

Dem : $n = \dim_{\mathbb{R}} E \Rightarrow E \simeq \mathbb{R}^n$
$(n = \dim_{\mathbb{C}} E \Rightarrow E \simeq \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n})$

$(e_1, \dots, e_n)$ base canonique de $\mathbb{R}^n$

$x \longmapsto N(x)$ norme quelconque

$x \longmapsto \|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

Lemme : N est continue pour $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$

Dem : $|N(x) - N(x_0)| \leq N(x - x_0) = N\left(\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - x_{i_0}) e_i\right)$

$$\boxed{|N(x) - N(x_0)| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - x_{i_0}| N(e_i) \leq \sum_{i=1}^{n} N(e_i) \|x - x_0\|_\infty}$$

Par rapport à $\|\cdot\|_\infty$, N est lipschitzienne de constante $\lambda = \sum\limits_{i=1}^{n} N(e_i)$ ■

En particulier, pour $x_0 = 0$, $|N(x)| \leq \lambda \|x\|_\infty$

Regardons $S = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty = 1\}$ "sphère unité"

C'est une partie compacte de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$

$$\inf_{x \in S} N(x) = m = N(x_0) > 0 \quad x_0 \in S$$

$$\|x\|_\infty = 1 \Rightarrow N(x) \geq m$$

$\dfrac{x}{\|x\|_\infty}$ de norme $\|\cdot\|_\infty$ égale à 1 $\Rightarrow N\left(\dfrac{1}{\|x\|_\infty} x\right) \geq m$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|x\|_\infty} N(x) \geqslant m \quad \Rightarrow N(x) \geqslant m \|x\|_\infty$$

$$m \|x\|_\infty \leqslant N(x) \leqslant \lambda \|x\|_\infty .$$

$\downarrow$ $\inf_S N$

↳ constante lipschitz $= \sum_{i=1}^{n} N(e_i)$ $\blacksquare$

Remarque : même raisonnement avec $\|\cdot\|_2 = \sqrt{\sum |x_i|^2}$ et alors $S =$ sphère ordinaire, elle aussi compacte.