Exercice 1 : $\forall$ parties A, B $d(A,B) = d(\bar{A}, \bar{B})$.

Exercice 2 : Trouver A, B fermées dans $\mathbb{R}$, disjointes, telles que $d(A,B) = 0$.
[prendre $A = \mathbb{Z}$]

Propriété de séparation des fermés.

A, B parties fermées disjointes.
(il se peut que $d(A,B) = 0$).

Théorème : Il existe des ouverts U, V disjoints tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

Démonstration :

$U = \{x \in X,\ d(x,A) < d(x,B)\}$

$V = \{x \in X,\ d(x,B) < d(x,A)\}$

$\varphi(x) = d(x,A) - d(x,B)$ continue $X \to \mathbb{R}$.

$U = \{x \in X,\ \varphi(x) < 0\} = \varphi^{-1}(\underbrace{]-\infty ; 0[}_{\text{ouvert de } \mathbb{R}})$ ouvert de X

Rem : $\{x,\ \varphi_1(x) < 0,\ \varphi_2(x) < 0\} = \bigcap \varphi_i^{-1}(]-\infty ; 0[)$ ouvert

si les φ_i sont continues $\leq$ $\leq$ $= \bigcap \varphi_i^{-1}(]-\infty ; 0])$ fermé.

V. Prolongement d'applications continues.

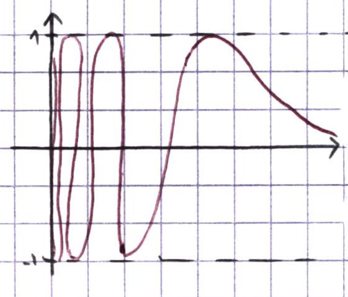
Question : Soit (X,d) un espace métrique et A une partie de X. On se donne $f : A \to \mathbb{R}$ continue. Existe-t-il un prolongement continu $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$?
(ça veut dire que $\tilde{f}_{|A} = f$).

Réponse générale : NON

Soit $X = \mathbb{R}$, $A =]0 ; +\infty[$.

$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, f continue sur A.

quand $x \to 0^+$, $\frac{1}{x} \to +\infty$ et $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ oscille entre -1 et 1.



On peut choisir des suites $x_n \to 0$ telles que $f(x_n) = \alpha$ et $f(x_n) \in [-1 ; 1]$.

$\alpha = \sin u \qquad u \in \left[\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right]$

$= \sin(u + 2n\pi)$

$= f\left(\frac{1}{u+2n\pi}\right)$

$x_n = \frac{1}{u+2n\pi} \longmapsto f(x_n) = \sin u = \alpha.$

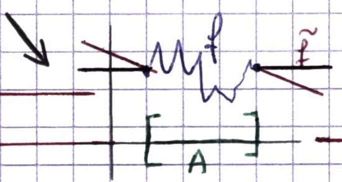
Impossible de prolonger par continuité en 0.

<u>Théorème de Tietze - Urysohn</u> :

Soit A une partie fermée d'un espace métrique (X, d).

Alors toute fonction continue $f : A \to \mathbb{R}$ admet un prolongement continu $\tilde{f}$ à X.

($\tilde{f}$ pas unique).



<u>Lemme 1</u> : Soient P, Q des parties fermées disjointes de X.

Alors $\exists u : X \to [0;1]$ continue telle que $u(x) = 0$ sur P et $u(x) = 1$ sur Q.

<u>Démonstration</u> :

Réponse : $u(x) = \frac{d(x,P)}{d(x,P) + d(x,Q)}$

$$\left.\begin{array}{l} d(x,P) = 0 \Leftrightarrow x \in P \\ d(x,Q) = 0 \Leftrightarrow x \in Q \end{array}\right\} \Rightarrow d(x,P) + d(x,Q) > 0 \text{ car } P, Q \text{ disjointes.}$$

donc u continue.

si $x \in P \quad d(x,P) = 0 \Rightarrow u(x) = 0$.

si $x \in Q \quad d(x,Q) = 0 \Rightarrow u(x) = 1$. ∎

<u>Lemme 2 (variante du lemme 1)</u> : Si P, Q parties fermées disjointes,

$\exists v : X \to [-1;1]$ continue telle que $v(x) = -1$ sur P et $v(x) = +1$ sur Q.

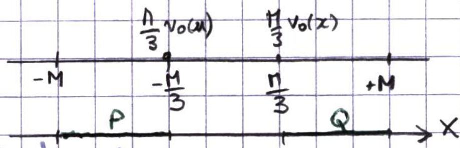
<u>Démonstration</u> :

$v(x) = -1 + 2u(x)$.

Démonstration du th. de Tietze - Urysohn :

Prenons $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur A fermé.

- Premier cas : f bornée, $M = \|f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)| < +\infty$.



$f(x) \in [-M ; +M]$.

$P = \{ x \in A ; f(x) \in [-M ; -\frac{M}{3}] \} = A \cap f^{-1}([M ; -\frac{M}{3}])$ fermé dans X.

$Q = \{ x \in A ; f(x) \in [\frac{M}{3} ; M] \}$ fermé dans X

Variante du lemme $\Rightarrow \exists v_0 : X \longrightarrow [-1;1]$ continue, égale à -1 sur P, et à $+1$ sur Q.

$$f(x) - \frac{M}{3} v_0(x) = \begin{cases} f(x) - (-\frac{M}{3}) \in \left[-\frac{2M}{3} ; 0\right] & \text{si } x \in P \\ f(x) - \frac{M}{3} \in \left[0 ; \frac{2M}{3}\right] \\ \in \left]-\frac{2M}{3} ; \frac{2M}{3}\right[& \text{si } x \in X \setminus (P \cup Q) \end{cases}$$

si $x \in X \setminus (P \cup Q)$ on a $\begin{cases} f(x) \in \left]-\frac{M}{3} ; \frac{M}{3}\right[\\ \frac{M}{3} v_0(x) \in \left[-\frac{M}{3} ; \frac{M}{3}\right] \end{cases}$

Posons $f_0(x) = f(x)$

$f_1(x) = f_0(x) - \frac{M}{3} v_0(x) \qquad f_1 : A \longrightarrow \left[-\frac{2M}{3} ; \frac{2M}{3}\right]$.

$\|f_1\|_\infty \leq \frac{2M}{3} = \frac{2}{3} \|f_0\|_\infty$.

$M \rightsquigarrow \frac{2M}{3}$.

$\exists v_1 : X \longrightarrow [-1;1]$ continue telle que $f_2 = f_1(x) - \frac{2M/3}{3} v_1(x)$ vérifie $\|f_2\|_\infty \leq \frac{2}{3} \|f_1\|$

Par récurrence, on trouve $v_n : X \longrightarrow [-1;1]$ continue telle que

$f_{n+1}(x) = f_n(x) - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n M \, v_n(x)$.

$\|f_{n+1}\|_\infty \leq \frac{2}{3} \|f_n\|_\infty \overset{\text{récurrence}}{\Rightarrow} \|f_n\|_\infty \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n M$.

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k M v_k(x) = f_{n+1}(x) \xrightarrow[\text{CVU}]{} 0$$

On a donc $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k M v_k(x)$

Posons $\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k M v_k(x)$.

$\|v_k\|_\infty \leq 1 \Rightarrow$ série CV normalement et $\|\tilde{f}\|_\infty \leq M = \|f\|_\infty$. •

Obs: si $M = \sup_{x \in A} f(x)$ pas atteint, càd $\forall x \in A$ $f(x) < M$.

$\exists n$ $f(x) < M\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$.

$\Rightarrow x \notin$ partie Q_n qui définit $v_n \Rightarrow v_n(x) < 1$.

$\Rightarrow \forall x \in X$ $\tilde{f}(x) < M$.

$\Rightarrow$ Si M pas atteint pour f, alors M non atteint pour $\tilde{f}$.

(car sur $X \setminus (P_n \cup Q_n)$ on a $-1 < v_n(x) < 1$).

• Deuxième cas: $f : A \to \mathbb{R}$ pas forcément bornée.

$$A \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{\varphi}]-1;1[$$
$$t \longmapsto \frac{2}{\pi}\arctan(t)$$

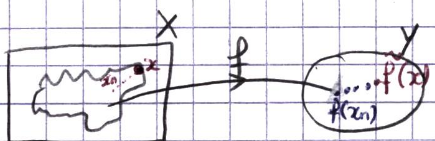
$$\mathbb{R} \xleftarrow{\psi}]-1;1[\, .$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}u\right) \longleftarrow u$$

$g = \varphi \circ f : A \longrightarrow]-1;1[$ continue bornée.

$\exists \tilde{g} \quad : X \longrightarrow]-1;1[$ prolongement continu.

Prenons $\tilde{f} = \psi \circ \tilde{g} : \underset{\text{continue}}{X \xrightarrow{\tilde{g}}]-1;1[\xrightarrow{\psi} \mathbb{R}}$

$\tilde{f}_{|A} = \psi \circ (\tilde{g}_{|A}) = \psi \circ g = \psi \circ \varphi \circ f = f$ • ∎



Cas des fonctions uniformément continues.

A partie de (X, d).

Supposons $f : A \to Y$ (Y, δ) espace métrique, complet, avec f uniformément continue.

Question: Peut-on prolonger f à $\bar{A} = \mathrm{Adh}_X(A)$?

Prenons $x \in \bar{A}$, $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ avec $x_n \in A$.

> **Lemme 1:** $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans Y.

Démonstration:

f uniformément continue.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta_\varepsilon > 0$, $\forall x, y \in A$, $d(x,y) \leq \eta_\varepsilon \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$. $\Rightarrow \delta(f(x_p), f(x_q)) \leq \varepsilon$. ∎

$\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_{\eta_\varepsilon/2}$, $n \geq N_{\eta_\varepsilon/2} \Rightarrow d(x_n, x) \leq \eta_\varepsilon/2$

$p, q \geq N_{\eta_\varepsilon/2} \Rightarrow d(x_p, x_q) \leq \eta_\varepsilon$

On prend $\tilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \in Y$ existe, car Y supposé complet.

Lemme 2 : Si (x_n) dans A, (x_n') dans A vérifient $x_n \to x$ et $x_n' \to x$ alors $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n')$.

Demonstration :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_{\varepsilon/2}$ $n \geq N_{\eta_{\varepsilon/2}} \Rightarrow d(x_n, x) \leq \frac{\eta_\varepsilon}{2}$.

$\exists N'_{\varepsilon/2}$ $n \geq N'_{\eta_{\varepsilon/2}} \Rightarrow d(x_n', x) \leq \frac{\eta_\varepsilon}{2}$.

$$n \geq \max(N_{\eta_{\varepsilon/2}}, N'_{\eta_{\varepsilon/2}}) \Rightarrow d(x_n, x_n') \leq \eta_\varepsilon$$

$$\underset{\text{continuité uniforme}}{\Longrightarrow} d(f(x_n), f(x_n')) \leq \varepsilon.$$

d'où le lemme 2 ∎

$\tilde{f} : \bar{A} \longrightarrow Y$ bien définie.

Lemme 3 : $\tilde{f}$ uniformément continue sur $\bar{A}$.

Démonstration :

Fixons $\varepsilon > 0$ et $x, y \in \bar{A}$ avec $d(x,y) \leq \eta_\varepsilon / 2$.

$x = \lim_{n\to\infty} x_n$ avec $x_n \in A$. $\tilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$.

$y = \lim_{n\to\infty} y_n$ avec $y_n \in A$ $\tilde{f}(y) = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$.

Pour n assez grand $\begin{cases} d(x_n, x) \leq \eta_\varepsilon/4 \\ d(y_n, y) \leq \eta_\varepsilon/4 \\ \delta(f(x_n), \tilde{f}(x)) \leq \varepsilon \\ \delta(f(y_n), \tilde{f}(y)) \leq \varepsilon \end{cases}$

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x,y) + d(y, y_n).$$
$$\leq \frac{\eta_\varepsilon}{4} + \frac{\eta_\varepsilon}{2} + \frac{\eta_\varepsilon}{4} = \eta_\varepsilon.$$

$\underset{\text{cont. unif.}}{\Longrightarrow} \delta(f(x_n), f(y_n)) \leq \varepsilon$.

$$\delta(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) \leq \delta(\tilde{f}(x), f(x_n)) + \delta(f(x_n), f(y_n)) + \delta(f(y_n), \tilde{f}(y)).$$
$$\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon. \ ∎$$

Théorème : Toute application uniformément continue $f : A \to Y$ dans un espace métrique complet Y se prolonge de manière unique en une application continue $\tilde{f} : \bar{A} \to Y$, qui est uniformément continue.

Cas particulier : $Y = \mathbb{R}$, on peut même prolonger (pas de manière unique) à $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$.

Théorème : E, F espaces normés avec F complet. Supposons A sev de E et $\ell : A \to F$ application linéaire continue.
Alors $\bar{A}$ est un sev de E et ℓ admet un prolongement continu unique $\tilde{\ell} : \bar{A} \to F$ qui est linéaire.

Démonstration :

- $\bar{A}$ stable par combinaisons linéaires.

$x = \lim x_n$, $y = \lim y_n$ avec $x_n, y_n \in A$.

$\lambda x + \mu y = \lim (\lambda x_n + \mu y_n) \in \bar{A}$.

- $\|\ell(x) - \ell(y)\|_F \leq |||\ell||| \, \|x - y\|_E$.

donc ℓ lipschitzienne $\Rightarrow$ ℓ uniformément continue.

Thm précédent $\Rightarrow \exists \tilde{\ell} : \bar{A} \to F$ prolongement continu unique.

$$\tilde{\ell}(\underbrace{\lambda x + \mu y}_{\in \bar{A}}) = \lim_{n \to \infty} \ell(\underbrace{\lambda x_n + \mu y_n}_{\in A})$$

$$\overset{\text{linéarité dans } A}{=} \lim_{n \to \infty} (\lambda \ell(x_n) + \mu \ell(y_n))$$

$$= \lambda \tilde{\ell}(x) + \mu \tilde{\ell}(y).$$

donc $\tilde{\ell}$ linéaire sur $\bar{A}$.