f^{-1} pas continue en $z=1$ $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{z\to 1 \\ \operatorname{Im} z>0}} \arg z = 0 \\ \lim\limits_{\substack{z\to 1 \\ \operatorname{Im} z\leq 0}} \arg z = 2\pi \end{cases}$

Exemple : Homéomorphisme de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ vers le cercle.

$X = \mathbb{R}[\mathbb{Z}]$ = ensemble des classes d'équivalence $\dot{x}$

$x \sim y$ si $x-y \in \mathbb{Z}$

$x = \underbrace{E(x)}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{Fr(x)}_{\in [0;1[}$

$x \sim Fr(x)$

$\dot{x} = \dot{Fr(x)}$

$d(\dot{x},\dot{y}) = \inf\limits_{k\in\mathbb{Z}} |x-y-k| = \min\Big(\underset{[0;1[}{Fr(x-y)} ;\ 1 - \underset{]0;1]}{Fr(x-y)} \Big)$

Application de passage au quotient $\pi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $x \longmapsto \dot{x}$

$d_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}(\dot{x},\dot{y}) = d(\pi(x),\pi(y)) \leq |x-y| = d_{\mathbb{R}}(x,y)$

π est lipschitzienne de rapport 1, donc continue.

$(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, d_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}})$ espace métrique.

$\varphi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow S^1 = \{z\in\mathbb{C}, |z|=1\}$, $\dot{x} \longmapsto e^{2\pi i x}$

autre représentant $x+k$, $k\in\mathbb{Z}$. $e^{2\pi i(x+k)} = e^{2\pi i x} \cdot e^{2\pi i k} = e^{2\pi i x}$.

φ bien définie et bijective.

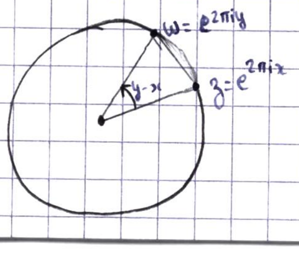
φ : paramétrisation du cercle trigonométrique par l'angle x mesurée en tours.

φ est continue (et même lipschitzienne de rapport 2π).

$|\underbrace{e^{2\pi i x} - e^{2\pi i y}}_{\varphi(x)-\varphi(y)}| = \Big|\int_x^y \underbrace{2\pi i e^{2\pi i t}}_{\varphi'(t)} dt\Big| \leq 2\pi |x-y|$

$\varphi^{-1} : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $z \longmapsto \dot{x} = \dot{\overline{\frac{1}{2\pi}\arg(z)}}\ \operatorname{mod}(\mathbb{Z})$

φ^{-1} est aussi lipschitzienne

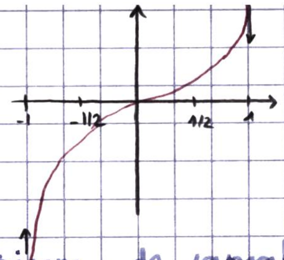


$\frac{y-x}{2}$ correspond à $\frac{1}{2}|w-z|$ qui en est le sinus.

$\frac{|y-x|}{2} = \frac{1}{2\pi} \arcsin\left(\frac{1}{2}|w-z|\right)$

$|y-x| = \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{1}{2}|w-z|\right)$.

$\arcsin' t = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$



sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $0 \leq \arcsin'(t) \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow$ sur $\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ arcsin est lipschitzienne de rapport $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

- si $|w - z| \leq 1$, $\frac{1}{2}|w-z| \leq \frac{1}{2}$.

$$|y - x| \leq \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2}|w-z| = \frac{1}{\pi\sqrt{3}}|w-z|.$$

$$d_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}(\dot{x}, \dot{y}) \leq \frac{1}{\pi\sqrt{3}}|w-z|.$$

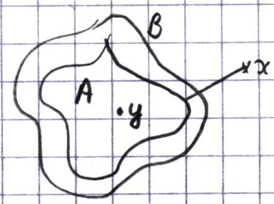
- si $|w-z| > 1$,

$$d_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}(\dot{x}, \dot{y}) \leq \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{demi tour}} \leq \frac{1}{2}|w-z|$$

$\Rightarrow \varphi^{-1}$ lipschitzienne de rapport $\leq \frac{1}{2}$.

Exercice: trouver le meilleur rapport possible pour φ^{-1}.

IV. Séparation de parties d'un espace métriques.



(X, d) espace métrique. A partie de X.

Définition: La distance de x à A est :

$$d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y).$$

$$A \subset B \Rightarrow d(x, A) \geq d(x, B).$$

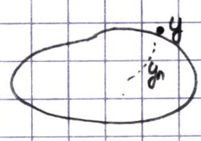
$$\boxed{\text{Propriété : } d(x, A) = d(x, \bar{A}).}$$

Démonstration :

$A \subset \bar{A} \Rightarrow d(x, \bar{A}) \leq d(x, A)$.

$y \in \bar{A}$ $\quad y = \lim_{n \to \infty} y_n$ avec $y_n \in A$

$|d(x, y) - d(x, y_n)| \leq d(y, y_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.



$$d(x, y) = \lim_{n \to \infty} d(x, y_n) \geq \inf_{n \in \mathbb{N}} d(x, y_n) \quad y_n \in A$$
$$\geq \inf_{z \in A} d(x, z) = d(x, A)$$

Prenons l'inf pour $y \in \bar{A}$, on obtient $d(x,\bar{A}) = \inf\limits_{y \in \bar{A}} d(x,y) \geq d(x,A)$ CQFD. ∎

Lemme : Si A est quelconque, $d(x,A) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{A}$.

Démonstration :

$d(x,A) = 0 \Leftrightarrow \inf\limits_{y \in A} d(x,y) = 0$

$\Leftrightarrow \exists$ suite $y_n \in A$ tq $d(x,y_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$\Leftrightarrow \exists$ suite $y_n \in A$ qui CV vers x

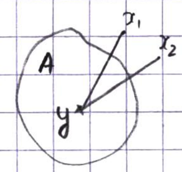
$\Leftrightarrow x \in \bar{A}$ ∎

Proposition : $x \longmapsto d(x,A)$ est lipschitzienne de rapport 1, donc uniformément continue sur X, nulle sur $\bar{A}$ et >0 sur $\complement_X \bar{A}$.

Démonstration :

$d(x_1, A) \ \overset{?}{} \ d(x_2, A)$.

$d(x_1,A) = \inf\limits_{y \in A} d(x,y)$.



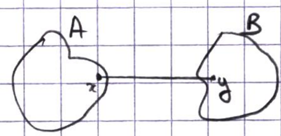
Inég. triangulaire $\Rightarrow d(x_1,y) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,y)$

en passant à l'inf pour $y \in A \Rightarrow d(x_1,A) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,A)$.

De même, par échange de x_1, x_2, $d(x_2,A) \leq d(x_1,x_2) + d(x_1,A)$.

donc $|d(x_1,A) - d(x_2,A)| \leq d(x_1,x_2)$. ∎

Définition : distance entre 2 parties.

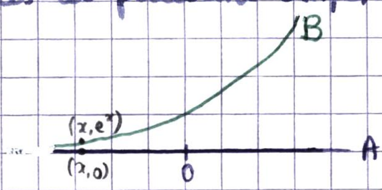


$d(A,B) = \inf \{ d(x,y),\ x \in A,\ y \in B \} \in \mathbb{R}^+$.

Attention : il se peut que A, B soient fermés et disjointes et pourtant $d(A,B) = 0$.

exemple : $X = \mathbb{R}^2$, $A =$ axe $Ox = \{(x,0)\ x \in \mathbb{R}\}$

$B =$ graphe de exp $= \{(x, e^x),\ x \in \mathbb{R}\}$.



$d((x,0),(x,e^x)) = e^x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$

$d(A,B) = 0$ et pourtant les parties sont fermées. $A = \{y = 0\}$, $B = \{y = e^x\}$ fermés.

Exercice 1: $\forall$ parties A, B $\quad d(A,B) = d(\bar{A}, \bar{B})$.

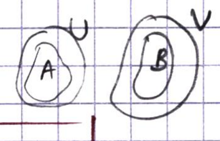
Exercice 2: Trouver A, B fermées dans $\mathbb{R}$, disjointes, telles que $d(A,B) = 0$.

[prendre $A = \mathbb{Z}$]

Propriété de séparation des fermés.

A, B parties fermées disjointes.

(il se peut que $d(A,B) = 0$).



Théorème : Il existe des ouverts U, V disjoints tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

Démonstration :

$U = \{x \in X,\ d(x,A) < d(x,B)\}$

$V = \{x \in X,\ d(x,B) < d(x,A)\}$

$\varphi(x) = d(x,A) - d(x,B)$ $\quad$ continue $X \longrightarrow \mathbb{R}$.

$U = \{x \in X,\ \varphi(x) < 0\} = \varphi^{-1}(\underbrace{]-\infty;0[}_{\text{ouvert de } \mathbb{R}})$ ouvert de X

Rem : $\{x,\ \varphi_1(x) < 0,\ \varphi_2(x) < 0\} = \bigcap \varphi_i^{-1}(]-\infty;0[)$ ouvert

si les φ_i sont continues $\leqslant$ $\quad\quad$ $\leqslant$ $\quad = \bigcap \varphi_i^{-1}(]-\infty;0])$ fermé.

V. Prolongement d'applications continues.

Question : Soit (X,d) un espace métrique et A une partie de X. On se donne $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Existe-t-il un prolongement continu $\tilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}$?

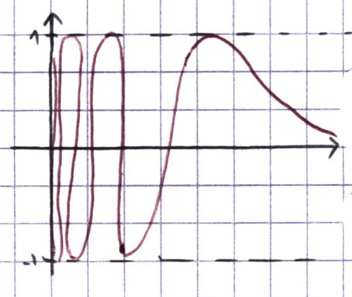
(ça veut dire que $\tilde{f}_{|A} = f$).

Réponse générale : NON

Soit $X = \mathbb{R}$, $A =]0;+\infty[$.

$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, f continue sur A.

quand $x \longrightarrow 0^+$, $\frac{1}{x} \longrightarrow +\infty$ et $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ oscille entre -1 et 1.



On peut choisir des suites $x_n \longrightarrow 0$ telles que $f(x_n) = \alpha$ et $f(x_n) \in [-1;1]$.