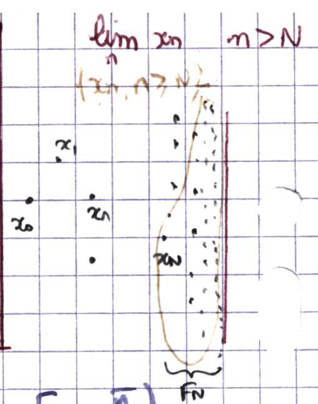


Proposition : Fixons une suite (x_n) dans une partie A de X.

$\text{Val-adh}\,(x_n) = \{v \in X\,;\ v \text{ valeur d'adhérence de } (x_n)\}$

$= \bigcap_{N \in \mathbb{N}} F_N \quad$ où $F_N = \overline{\{x_n\,;\ n \geq N\}}$

F_N ensemble fermé. (F_N) suite décroissante de fermés.

Conséquence : $\text{Val-adh}\,(x_n)$ est un fermé contenu dans $\bar{A}$. (En effet $F_N \subset \bar{A}$).

Démonstration :

$V = \text{Val-adh}\,(x_n)$

$F = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} F_N$ (fermé de X, $F \subset \bar{A}$).

- $V \subset F$.

Soit $v \in V$, $\forall \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N$ tq $d(x_n, v) \leq \varepsilon$. $(*)$

Est-ce que $v \in F = \bigcap F_N$.

À montrer $v \in F_N$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

$v \in F_N = \overline{\{x_n\,;\ n \geq N\}} \iff \forall \delta > 0\quad B(v, \delta) \cap \{x_n\,;\ n \geq N\} \neq \emptyset.$

$\iff \forall \delta > 0\quad \exists n \geq N$ tq $d(x_n, v) < \delta$.

Il suffit de prendre $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$ dans $(*)$.

- $F \subset V$.

Prenons $v \in F = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} F_N$.

$\forall N \in \mathbb{N}\quad v \in F_N = \overline{\{x_n\,;\ n \geq N\}}$

$\forall N \in \mathbb{N}\quad \forall \varepsilon > 0\quad B(v, \varepsilon) \cap \{x_n\,;\ n \geq N\} \neq \emptyset.$

càd $\exists n \geq N$ tq $d(x_n, v) < \varepsilon$.

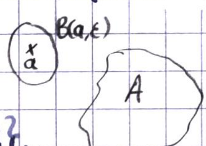
d'où $(*)$ et donc $v \in V = \text{Val-adh}\,(x_n)$ ■

2. Notion de point d'accumulation et de point isolé.

Définition : Soit (X, d) un espace métrique et A une partie de X.

(i) On dit qu'un point $a \in X$ est un point d'accumulation de A si $a \in \overline{A \setminus \{a\}}$.

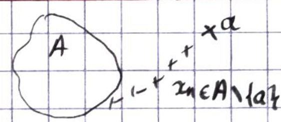
(ii) On dit que $a \in A$ est isolé si $a \notin \overline{A \setminus \{a\}}$.



(ii) $\underset{\text{déf.}}{\iff} \exists \varepsilon > 0$ tq $B(a, \varepsilon) \cap (A \setminus \{a\}) = \emptyset. \iff \exists \varepsilon > 0$ tq $B(a, \varepsilon) \cap A = \{a\}$.

(i) $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad B(a,\varepsilon) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$.

Proposition: a point d'accumulation de $A \Leftrightarrow \exists$ suite (x_n) dans $A \setminus \{a\}$ tq $a = \lim_{n\to\infty} x_n$



Démonstration :

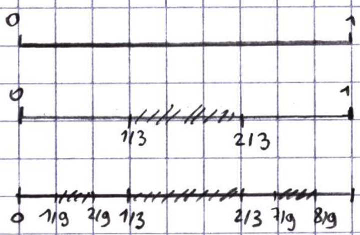
c'est trivial ! (prendre $\varepsilon = 2^{-n}$). ∎

Exemple: Ensemble de Cantor.

$K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

$K_0 = [0;1]$

$K_1 = [0;\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3};1]$



$K_2 = [0;\frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9};\frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9};\frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9};1]$.

K_n comporte 2^n intervalles de longueur $\frac{1}{3^n}$.

longueur totale $= 2^n \times \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$x \in [0;1]$, on l'écrit en base 3. $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n} = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots \quad a_n \in \{0,1,2\}$.

$]\frac{1}{3};\frac{2}{3}[$ nombres pour lesquels on ne peut pas trouver d'écriture telle que $a_1 = 0$ ou 2.

$\frac{1}{3} = 0,1 = 0,22\dots2$.

$K_n = \{x \in [0;1]\,;\ x$ possède une écriture triadique avec $a_1, a_2, \dots, a_n \in \{0;2\}$. $a_k \in \{0,1,2\}$ pour $k \geq n+1\}$

$K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \{x \in [0;1]\,;\ x = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots,\ a_i \in \{0;2\}\}$.

$x = 2.\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n}}_{\text{développements propres.}}\,;\ a_n \in \{0;1\}$

$$\begin{array}{ccccc} K & \xleftrightarrow{\text{bij.}} & \{0;1\}^{\mathbb{N}^*} & \xrightarrow{\text{surj.}} & [0;1] \\ x & \xleftrightarrow[\varphi]{} & (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} & \xrightarrow[\psi]{} & y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^{-n}. \end{array}$$

ψ surjective mais pas injective.

$\frac{1}{2} = y = 0,1 = 0,01111\dots = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$

$(1,0,\dots,0,\dots) \xrightarrow{\psi} y = \frac{1}{2}$

$(0,1,1,\dots,\dots) \longmapsto y = \frac{1}{2}$.

$K \subset [0;1] \Rightarrow \text{card } K \leq \text{card}([0;1]) = \text{card } \mathbb{R}$.

$\varphi \circ \psi$ surjective $\Rightarrow \text{card } K \geq \text{card}([0;1]) = \text{card } \mathbb{R}$.

$\text{card } K = \text{card } \mathbb{R}$.

• $K^\circ = \emptyset$.

si $]a,b[\subset K$ $\quad x = \frac{a+b}{2} = 0,a_1 a_2 \dots a_n \dots$
$\quad x_n = 0,a_1 a_2 \dots a_n 1 1 1 \dots 1 \dots$ } base 3.

$|x - x_n| \leq 3^{-n}$.

pour n assez grand $x_n \in]a,b[$, or $x_n \notin K$.

contradiction $]a,b[\not\subset K$.

• K n'a pas de points isolés : tous ses points sont des points d'accumulation.

$x \in K$.

? $\exists x_n \in K$, $x_n \neq x$, avec $x_n \longrightarrow x$.

$x = 0,a_1 a_2 \dots a_n \dots$ en base 3, $a_n \in \{0;2\}$.

$x_n = 0,a_1 a_2 \dots a_n \underbrace{|2-a_{n+1}|}_{\text{rang } n+1} 0 \dots 0. \in K$.

$|x - x_n| \leq 3^{-n}$.

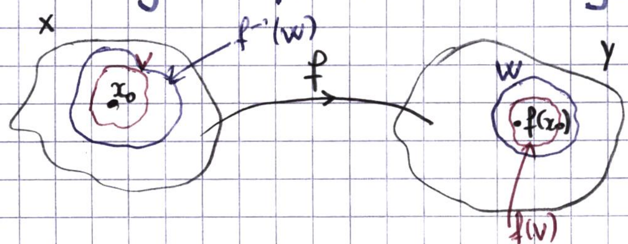
III. Lien entre continuité et topologie.

1) Continuité en un point.

$(X, \mathcal{T})$ $(Y, \mathcal{T}')$: espaces topologiques.

<u>Définition</u> : Une application $f : X \to Y$ est <u>continue en un point</u> $x_0 \in X$ si $\forall W$ voisinage de $f(x_0)$, $\exists V$ voisinage de x_0 tq $f(V) \subset W$. (*)

$x \in V \Rightarrow f(x) \in W$.



Dans un espace métrique, on prend des boules comme voisinages.

Formulations équivalentes : • $\forall W$ voisinage de $f(x_0)$, $f^{-1}(W)$ est un voisinage de x_0.

Dém . si $f^{-1}(W)$ voisinage de x_0, tout voisinage V plus petit convient dans (*).

. si (*) est vraie, $f^{-1}(W)$ contient V, donc V voisinage.

- $\forall W$ ouvert contenant $f(x_0)$, $f^{-1}(W)$ est un voisinage de x_0.

<u>Définition</u> : $f : X \to Y$ est dite continue si f est continue en tout point de X.

<u>Proposition (caractérisation)</u> : Il y a équivalence entre :

(i) $f : X \to Y$ est continue.

(ii) $\forall U$ ouvert de Y, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X.

(iii) $\forall F$ fermé de Y, $f^{-1}(F)$ est un fermé de X.

<u>Démonstration</u> :

- (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).

$$\begin{aligned} f^{-1}(\complement_Y A) &= \{x \in X,\ f(x) \in \complement_Y A\} \\ &= \{x \in X;\ f(x) \notin A\} \\ &= \complement_X \{x \in X;\ f(x) \in A\}. \\ &= \complement_X f^{-1}(A). \end{aligned}$$

$$f^{-1}(\complement_Y A) = \complement_X f^{-1}(A)$$

- (i) $\Rightarrow$ (ii)

Supposons f continue, et soit U ouvert de Y.

Soit $x_0 \in f^{-1}(U)$. Alors $f(x_0) \in U$.

U voisinage de $f(x_0)$ $\underset{\text{continue en } x_0}{\Longrightarrow}$ $f^{-1}(U)$ voisinage de x_0.

$f^{-1}(U)$ voisinage de n'importe lequel de ses points.

Donc $f^{-1}(U)$ est un ouvert.

- (ii) $\Rightarrow$ (i).

Prenons $x_0 \in X$ et W voisinage ouvert de $f(x_0)$.

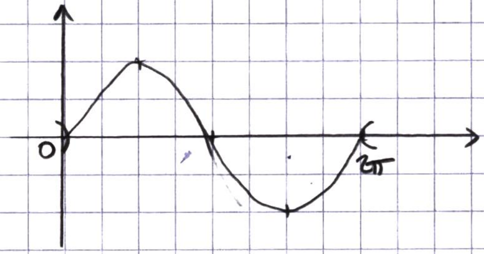
L'hypothèse (ii) me dit que $f^{-1}(W)$ est un ouvert.

Or $x_0 \in f^{-1}(W)$, donc $f^{-1}(W)$ est un voisinage de x_0. ∎

<u>Attention</u> : L'image d'un ouvert par une application continue n'est en général pas un ouvert, et de même l'image d'un fermé n'est en général pas un fermé.

Exemple :

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto \sin x.$



$f(]0;2\pi[) = [-1;1].$

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto e^x$

  $\mathbb{R}$ fermé dans $\mathbb{R}$.
  $f(\mathbb{R}) =]0;+\infty[$ pas fermé.

Définition : On dit qu'une application $f : X \to Y$ est :

(i) ouverte si $\forall U$ ouvert de X, $f(U)$ ouvert de Y.

(ii) fermée si $\forall F$ fermé de X, $f(F)$ fermé de Y.

Rem : Les notions d'applications continues, ouvertes, fermées sont 2 à 2 distinctes. (trouver des exemples).

2) Notion d'homéomorphisme entre espaces topologiques.

Définition : Une application $f : X \to Y$ entre espaces topologiques est appelée homéomorphisme si f est bijective telle que $f : X \to Y$ et $f^{-1} : Y \to X$ sont continues (on dit parfois f est "bi continue").

Rem : f homéomorphisme $\Leftrightarrow f$ bijective, continue, ouverte.
$\Leftrightarrow f$ bijective, continue, fermée.

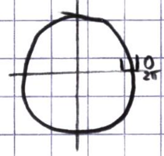
Exemple :

I intervalle de $\mathbb{R}$.

$f : I \to \mathbb{R}$ continue strictement monotone.

On sait que $J = f(I)$ est un intervalle et que $f : I \to J$ est un homéomorphisme.

Attention : $f : X \to Y$ bijective et continue $\not\Rightarrow f^{-1}$ continue.



ex : $X = [0;2\pi[$ $\qquad Y = \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}$

$f : X \to Y$
$x \mapsto z = e^{ix}$

f est continue.

$f^{-1} : Y \to X$
$z \mapsto \arg(z) \in [0;2\pi[.$

f^{-1} pas continue en $z = 1$ $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{z \to 1 \\ \mathrm{Im}\, z > 0}} \arg z = 0 \\ \lim\limits_{\substack{z \to 1 \\ \mathrm{Im}\, z < 0}} \arg z = 2\pi \end{cases}$