4) Intérieur, fermeture et frontière.

$(X, \mathcal{T})$ espace topologique.

A partie de X.

Proposition Il existe un plus grand ouvert U contenu dans A.
On l'appelle "intérieur de A" noté $\mathring{A}$ (ou pour être précis $Int_X(A)$).

Démonstration :

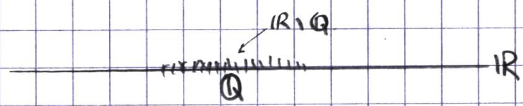
Il suffit de prendre $\displaystyle A^\circ = \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{T} \\ U \subset A}} U$.

Caractérisation : $A^\circ = \{x \in A \,;\, A \text{ est un voisinage de } x\}$

$= \{x \in A \,;\, \exists U \in \mathcal{T} \text{ tq } A \supset U \ni x\}$. ∎

Exemple :

$\mathbb{R}$ $d(x,y) = |x-y|$.



$A = \mathbb{Q}$

$A^\circ = \emptyset$.

$\forall x \in \mathbb{Q}$, tout $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ contient des irrationnels

tout $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\not\subset \mathbb{Q}$.

$\mathbb{Q}$ pas un voisinage de x dans $\mathbb{R}$.

$Int_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}) = \emptyset$.

. X espace quelconque.

$Int_X(X) = X$.

(En particulier, $Int_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$).

Définition : A partie de X.

$Int_X(A) =$ plus grand ouvert $U \subset A$.

$= \{x \in A \mid \exists V \text{ voisinage de } x \text{ tq } V \subset A\}$

$= \{x \in A \mid \exists V \text{ ouvert} \ni x \text{ tq } V \subset A\}$.

Sur un espace métrique : $Int_X(A) = \{x \in A,\ \exists r > 0\ B(x,r) \subset A\}$.

$\displaystyle Int_X(A) = \bigcup_{\substack{V \subset A \\ V \text{ ouvert}}} V$ c'est un ouvert.

Notation : noté $\mathring{A}$.

Définition: Fermeture ou adhérence d'une partie.

$\mathrm{Adh}_X(A)$ = plus petit fermé $F \supset A$.

$$= \bigcap_{\substack{F \supset A \\ F \text{ fermé}}} F$$

Notation abrégée : $\bar{A}$. (si l'espace X dans lequel on travaille est implicitement précisé).

Propriété: Pour toute partie A de X $\underset{\text{ouvert}}{\mathring{A}} \subset A \subset \underset{\text{fermé}}{\bar{A}}$.

Définition: Frontière (ou bord) de la partie A.

$Fr_X(A) = \bar{A} \setminus A^\circ$

$= \bar{A} \cap \complement_X(\mathring{A})$.

Notation : ∂A.

Obs : $\complement_X \mathring{A} = \complement(\text{ouvert})$ c'est un fermé

$Fr_X(A)$ est donc un fermé.

Relations de complémentation:

- $\overline{\complement A} = \complement(A^\circ)$.
- $\mathring{(\complement A)} = \complement \bar{A}$
- $\partial(\complement A) = \partial A$.

Démonstration:

- $\underset{\text{ouvert}}{U} \subset A \Leftrightarrow \complement A \subset \complement U = F$ fermé.

prendre U le plus grand possible (union de tous ces ouverts) correspond à prendre F le plus petit possible.

Le plus grand U c'est $\mathring{A}$.

Le plus petit F c'est $\overline{\complement A}$.

- $A \subset F \Leftrightarrow U = \complement F \subset \complement A$.
- $\partial A = \bar{A} \cap \complement(\mathring{A}) = \bar{A} \cap \overline{\complement A}$.

$\partial(\complement A) = \overline{\complement A} \cap \bar{A} = \bar{A} \cap \overline{\complement A}$.

Caractérisation en terme de voisinage :

$\bar{A} = \{x \in X ; \forall V \text{ voisinage de } x \text{ on a } A \cap V \neq \emptyset\} = \{x \in X ; \forall V \text{ ouvert } \ni x, \text{ on a } A \cap V \neq \emptyset\}$

Démonstration :

Notons $B = \{x \in X ; \forall V \text{ ouvert } \ni x \text{ on a } A \cap V \neq \emptyset\}$.

$\complement B = \{x \in X ; \underbrace{\exists V \text{ ouvert } \ni x \quad A \cap V = \emptyset}_{\text{négation de la propriété}}\}$

$= \{x \in X \quad \exists V \text{ ouvert } \ni x \text{ tq } V \subset \complement A\}$

$=$ réunion des ouverts $V \subset \complement A$

$= \mathring{\complement A} = \complement \bar{A}$

$\complement B = \complement \bar{A} \Leftrightarrow B = \bar{A}$. ■

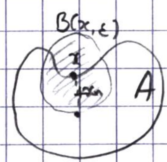
Définition : Adhérence dans un espace métrique.

$\bar{A} = \{x \in X ; \forall r > 0 \quad A \cap B(x, r) \neq \emptyset\}$

dans un espace métrique, on peut prendre pour voisinages les boules ouvertes !!

Proposition : Dans un espace métrique (X, d)

$\bar{A} = \{x = \lim_{n \to \infty} x_n \in X ; x_n \in A\}$.



Proposition : (en général).

- $\bar{A} = A \cup (\partial A)$
- $\mathring{A} = A \setminus (\partial A)$.

Démonstration :

- $\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$

$A \cup (\partial A) = \bar{A}$ (on enlève $\mathring{A}$ mais on rajoute A qui contient $\mathring{A}$).

- seconde égalité : également de la pure logique. ■

Démonstration proposition précédente :

Suite $x_n = a \in A$ suite constante.

$\lim_{n \to \infty} x_n = a$.

$B = \{x = \lim_{n \to \infty} x_n ; x_n \in A\}$

. On voit que $B \supset A$

. $B \subset \bar{A}$?

$x = \lim_{n \to \infty} x_n$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad n \geq N \Rightarrow d(x, x_n) < \varepsilon.$

$\Rightarrow x_n \in B(x, \varepsilon).$

$\Rightarrow A \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ (x_n est dedans).

donc $x \in \bar{A}$.

. $B \supset \partial A$?

si $x \in \partial A \subset \bar{A}$

$\varepsilon = 2^{-n} \quad A \cap B(x, 2^{-n}) \neq \emptyset.$

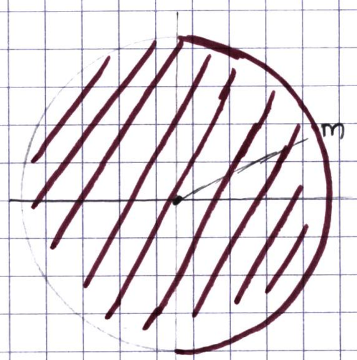
$\exists x_n \in A$ tq $x_n \in B(x, 2^{-n})$ càd $d(x, x_n) \leq 2^{-n}$.

$\lim_{n \to \infty} x_n = x$, donc $x \in B$.

donc $\partial A \subset B$ (et même $\bar{A} \subset B$).

Conclusion $B = \bar{A}$. ■

Exemple :



. $X = \mathbb{R}^2$ distance euclidienne.

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x^2 + y^2 < 1$ ou $x^2 + y^2 = 1$ et $x > 0\}$

$\mathring{A} = D(0,1)$ disque ouvert.

$\bar{A} = D_f(0,1)$ disque fermé.

$m = (x,y) \quad x^2 + y^2 = 1 \qquad m = \lim m_n$ où $m_n = (1 - 2^{-n}) m = (1 - 2^{-n})(x,y)$.

Exemples (contre-intuitifs) :

$X = \mathbb{R}^2 \quad d(x,y) = |x - y|$.

$A = \mathbb{Q}$.

$\bar{A} = \{x = \lim_{n \to \infty} x_n \ ; \ x_n \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{R}$ tout entier. (approx. par des décimaux par ex).

$\mathring{A} = \emptyset$

$\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$

Attention : ici $\partial \bar{\mathbb{Q}} = \partial \mathbb{R} = \emptyset. \neq \partial \mathbb{Q}$

En général $\partial \bar{A} \subset \partial A$.

$\partial \mathring{A} \subset \partial A$) mais pas forcément égalité.

II. Valeurs d'adhérence, points d'accumulation.

Ici (X,d) espace métrique.

1. Valeurs d'adhérence.

Définition : On dit que v est une valeur d'adhérence d'une suite (x_n) d'une partie A de X si $v \in X$ est tel que $\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}\ n \geq N$ et $d(x_n, v) \leq \varepsilon$. $(*)$

autre formulation : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ infinité d'indices n tels que $d(x_n, v) \leq \varepsilon$.

Rem : Ne pas confondre avec la limite $v = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

> Proposition (caractérisation) :
>
> v est valeur d'adhérence de la suite (x_n) $\Longleftrightarrow$ $\exists$ sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tq $v = \lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k}$
>
> $n_0 < n_1 < \dots < n_k < \dots$

Démonstration :

- $v = \lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} \Rightarrow v$ est une valeur d'adhérence.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists K \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N},\ k \geq K \Rightarrow d(x_{n_k}, v) \leq \varepsilon$.

Fixons $N \in \mathbb{N}$, si je prends $k = \max(K, N)$ $\quad n_k \geq k \geq N$

$k \geq K \Rightarrow d(x_{n_k}, v) \leq \varepsilon$.

$n = n_k$ vérifie $n \geq N$ et $d(x_n, v) \leq \varepsilon$.

- Supposons v valeur d'adhérence, càd $(*)$.

Prenons $\varepsilon = 2^{-k}$

$k = 0$ $\quad \varepsilon = 1$ $\quad \exists n_0 \geq N = 0$ tq $d(x_{n_0}, v) \leq 1$.

Par récurrence, supposons n_{k-1} déjà choisi.

$\varepsilon = 2^{-k}$, $N = n_{k-1} + 1$ dans $(*)$.

$\exists n$ (ce sera n_k) tel que $n \geq N$ et $d(x_n, v) \leq \varepsilon$.

$n_k \geq n_{k-1} + 1$ et $d(x_{n_k}, v) \leq 2^{-k}$

$n_k > n_{k-1}$ et $d(x_{n_k}, v) \leq 2^{-k}$.

On a bien $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = v$. ■