CONCEPTS FONDAMENTAUX DE LA TOPOLOGIE.

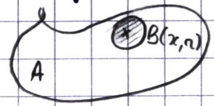
I. Ensembles ouverts et espaces topologiques.

1) Topologie d'un espace métrique.

Soit (E,d) un espace métrique.

Définition : Une partie A de E est dite ouverte si : $\forall x \in A$, $\exists r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A$.

"Intuitivement, c'est une partie qui ne contient pas de points de sa frontière".



Propriétés :

- $\emptyset$ est ouvert.
- l'espace entier E est ouvert.
- A, B ouverts $\Rightarrow A \cap B$ ouvert.

Démonstration :

Prenons $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ et $x \in B$.

$x \in A$ et A ouvert : $\exists r' > 0$ tq $B(x,r') \subset A$

$x \in B$ et B ouvert : $\exists r'' > 0$ tq $B(x,r'') \subset B$.

Prenons $r = \min(r', r'') > 0$, alors $B(x,r) \subset A \cap B$. ∎

Rem : Plus généralement, si on a une famille finie d'ouverts $A_1, A_2, \dots, A_p$, alors $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_p$ est un ouvert.

Dém : $x \in \bigcap A_i$: $x \in A_i$, $\exists r_i$ tq $B(x,r_i) \subset A_i$.

On prend $r = \min(r_1, \dots, r_p) > 0$, alors $B(x,r) \subset \bigcap A_i$.

Attention : $\bigcap_{\text{infinie}}$ (ouverts) n'est pas toujours un ouvert.

Exemple : . tout intervalle ouvert $]a,b[$ sur $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$.

$x \in]a,b[$ $\quad B(x,r) =]x-r ; x+r[$.

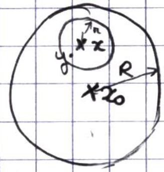
Il suffit de prendre $r = \min(x-a, b-x) > 0$.

. $A_p =]-\frac{1}{p} ; \frac{1}{p}[$, $p \in \mathbb{N}^*$

$\bigcap_{p \in \mathbb{N}^*} A_p$. soit $x \in \bigcap_{p \in \mathbb{N}^*} A_p$ $\begin{cases} x \geq 0 & x < \frac{1}{p} \quad \forall p \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x = 0 \\ x \leq 0 & x > -\frac{1}{p} \quad \forall p \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x = 0. \end{cases}$ $\quad \bigcap_{p \in \mathbb{N}^*} A_p = \{0\}$ pas un ouvert !

Propriété : Toute boule ouverte $\Omega = B(x, r)$ d'un espace métrique est un ouvert.

Démonstration :



$x \in \Omega = B(x_0, R)$ $\quad d(x, x_0) < R$.

Je prends $r = R - d(x, x_0)$, alors $B(x, r) \subset \Omega$.

Prenons $y \in B(x, r)$, on a $d(x, y) < r$.

$$\begin{aligned} d(x_0, y) &\underset{\text{triang.}}{\leqslant} d(x_0, x) + d(x, y) \\ &< d(x_0, x) + r \\ &= d(x_0, x) + \big(R - d(x, x_0)\big) = R. \end{aligned}$$

On a donc $d(x_0, y) < R \Rightarrow y \in \Omega$, donc $B(x, r) \subset \Omega$. ■

Propriété : Toute réunion $\bigcup_{i \in I} A_i$ d'ouverts est un ouvert. (I fini ou infini).

Démonstration :

Prenons $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$.

$\exists i \in I$ tel que $x \in A_i$.

A_i ouvert, donc par définition $\exists r_i$ tq $B(x, r_i) \subset A_i$.

$\Rightarrow B(x, r_i) \subset \bigcup_{j \in I} A_j$. ■

Définition : On appelle <u>voisinage</u> d'un <u>point</u> x_0 de l'espace métrique (E, d) une partie V qui contient une boule ouverte $B(x_0, r)$, $r > 0$.

Propriété : $V_1, \ldots, V_p$ voisinages de x_0 $\Rightarrow$ $V = V_1 \cap \ldots \cap V_p$ voisinage de x_0.

Démonstration :

$B(x_0, r_i) \subset V_i \Rightarrow B(x_0, r) \subset V$ si $r = \min(r_i)$

(et ça ne marche que pour un nombre fini de voisinages). ■

Proposition : Une partie A de E est ouverte ssi elle est voisinage de chacun de ses points.

2) Notion d'espace topologique.

Définition : On appelle espace topologique un ensemble X muni d'une collection $\mathcal{C}$ de parties ($\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$) appelée "topologie" de X et formée d'ensembles $U \in \mathcal{C}$ appelés "ouverts de X" satisfaisant les axiomes suivants :

(i) $\emptyset$ et X sont des ouverts.

(ii) $\forall U, V \in \mathcal{C}$ alors $U \cap V \in \mathcal{C}$ [ceci implique $U_1 \cap \ldots \cap U_p \in \mathcal{C}$ si $U_i \in \mathcal{C}$].

(iii) $\forall$ famille $(U_i)_{i\in I}$ de parties de X tq $U_i \in \mathcal{C}$ alors $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{C}$.

Exemples :

- $\mathcal{C} = \{\emptyset, X\} \subset \mathcal{P}(X)$.

Rem : Cette topologie s'appelle la "topologie grossière".

- $\mathcal{C} = \mathcal{P}(X)$

Rem : Cette topologie s'appelle la "topologie discrète".

ex : $E = \mathbb{Z}$ $\quad d(x,y) = |x-y|$.

$\forall x \in \mathbb{Z}$ $\quad B(x, \frac{1}{2}) = \{x\}$

Soit A partie quelconque de $\mathbb{Z}$.

$\forall x \in A$ $\quad B(x, \frac{1}{2}) = \{x\} \subset A$.

donc A partie ouverte de $\mathbb{Z}$.

$\mathcal{C} = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ $\quad (\mathbb{Z}, d)$ est un espace discret.

- X ensemble quelconque.

Je choisis $\begin{cases} d(x,y) = 1 & \text{si } x \neq y. \\ d(x,y) = 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$ $\qquad B(x, \frac{1}{2}) = \{x\}$.

Avec cette distance, on a (X,d) discret.

Rem : X discret $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X$ $\quad \{x\}$ est un ouvert.

Dém : $\Rightarrow$) évident

$\Leftarrow$) $A \subset X$ quelconque.

$A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$ sera aussi ouvert.

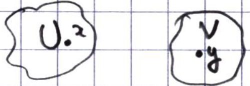
Rem : "Un espace discret est un espace dont les points sont isolés".

• $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ ne sont donc pas discrets.

Définition : axiome de séparation.

Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dit séparé si

$\forall x, y \in X$ avec $x \neq y$, $\exists U$ ouvert $\ni x$, $\exists V$ ouvert $\ni y$ tel que $U \cap V = \emptyset$.
$U \in \mathcal{T}$, $V \in \mathcal{T}$



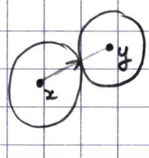
U,V disjoints

Contre exemple :

Soit X au moins 2 points. $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ topologie grossière.

$(X, \mathcal{T})$ non séparé !

(E, d) espace métrique.



$U = B(x, r)$
$V = B(y, r)$ avec $r = \frac{1}{2} d(x,y)$

$U \cap V = \emptyset$.

Proposition : Tout espace métrique est séparé.

3). Ensembles fermés.

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. (par exemple un espace métrique (E, d))
($\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(E)$ constitué des ouverts pour la distance d).

Définition : Une partie A de X est dite fermée dans X si $\complement_X A = X \setminus A$ ouvert de X
$\Leftrightarrow \complement_X A \in \mathcal{T}$.

(i') $\emptyset$ et X sont des fermés.

(ii') $A_1, \dots, A_p$ fermés $\Rightarrow A_1 \cup \dots \cup A_p$ fermé.

$\complement_X (A_1 \cup \dots \cup A_p) = \underbrace{\complement_X A_1}_{\text{ouvert}} \cap \underbrace{\complement_X A_2}_{\text{ouvert}} \cap \dots \cap \underbrace{\complement_X A_p}_{\text{ouvert}}$ cette intersection est un ouvert,

donc $A_1 \cup \dots \cup A_p$ fermé.

(iii') $(A_i)_{i \in I}$ fermé $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i$ fermé.

$\complement_X \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \underset{(*)}{=} \bigcup_{i \in I} \left(\complement_X A_i\right)$ = réunion d'ouverts donc ouvert.

(*) $x \in \bigcap_{i \in I} A_i \underset{\text{déf de } \cap}{\Leftrightarrow} \forall i \in I, x \in A_i$

$x \in \complement_X \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$
$\Updownarrow$ déf de $\complement_X$

$x \notin \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I, x \notin A_i$
$\Leftrightarrow \exists i \in I, x \in \complement_X A_i \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} \left(\complement_X A_i\right)$.

4) Intérieur, fermeture et frontière.

$(X, \mathcal{T})$ espace topologique.

A partie de X.

Proposition. Il existe un plus grand ouvert U contenu dans A.
On l'appelle "intérieur de A" noté $\mathring{A}$ (ou pour être précis $\mathrm{Int}_X(A)$).

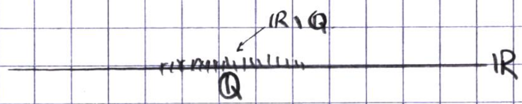
Démonstration :

Il suffit de prendre $\mathring{A} = \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{T} \\ U \subset A}} U$.

Caractérisation : $\mathring{A} = \{x \in A \,;\, A \text{ est un voisinage de } x\}$
$= \{x \in A \,;\, \exists U \in \mathcal{T} \text{ tq } A \supset U \ni x\}$. $\blacksquare$

Exemple :

$\mathbb{R}$ $d(x,y) = |x-y|$.



$A = \mathbb{Q}$

$\mathring{A} = \emptyset$.

$\forall x \in \mathbb{Q}$, tout $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ contient des irrationnels

tout $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\not\subset \mathbb{Q}$.

$\mathbb{Q}$ pas un voisinage de x dans $\mathbb{R}$.

$\mathrm{Int}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}) = \emptyset$.

. X espace quelconque.

$\mathrm{Int}_X(X) = X$.

(En particulier, $\mathrm{Int}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$).