# Composée d'applications linéaires

$$E \xrightarrow{\ell} F \xrightarrow{m} G$$

**Proposition** : $\ell \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $m \in \mathcal{L}_c(F,G)$ alors $m \circ \ell \in \mathcal{L}_c(E,G)$ et $|||m\circ\ell||| \leqslant |||m|||\,|||\ell|||$

Dem : $\|m\circ\ell(x)\|_G = \|m(\ell(x))\|_G \leqslant |||m|||\,\|\ell(x)\|_F$
$\leqslant \underbrace{|||m|||\,|||\ell|||}_{C}\|x\|_E$ ■

Cas particulier : $A = \mathcal{L}_c(E,E)$ $\mathbb{K}$-algèbre normée
$(A,+,\circ,\cdot)$
$|||\ell^k||| \leqslant |||\ell|||^k$

**Théorème** : $(F,\|.\|_F)$ complet $\Rightarrow (\mathcal{L}_c(E,F),|||.|||)$ complet.

22/10/2014

Dem : $(\ell_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suite de Cauchy, $\ell_k \in \mathcal{L}_c(E,F)$
$\forall \varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall j,k\in\mathbb{N},\ j,k\geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |||\ell_k-\ell_j|||\leqslant\varepsilon$
Fixons $x\in E$ et regardons $\ell_k(x)\in F$
$\|\ell_k(x)-\ell_j(x)\|_F = \|(\ell_k-\ell_j)(x)\|_F$
$\leqslant |||\ell_k-\ell_j|||\,\|x\|_E \leqslant \varepsilon\|x\|_E$ si $j,k\geqslant N_\varepsilon$.

Conclusion : $x\in E$ étant fixé, $(\ell_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $F$. Elle a donc une limite $\ell(x) = \lim_{k\to+\infty}\ell_k(x)$

- $\ell \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ ? $\ell(\lambda x+\mu y) = \lim_{k\to+\infty}\ell_k(\lambda x+\mu y)$

$$\underset{\ell_k \text{ linéaire}}{=} \lim_{k\to+\infty}\lambda\ell_k(x)+\mu\ell_k(y)$$

$$= \lambda\ell(x)+\mu\ell(y).$$

• $l$ continue ?

$\varepsilon = 1 \rightsquigarrow N_1$ tq $\|l_k(x) - l_j(x)\|_F \leq \varepsilon \|x\|_E$ pour $j,k \geq N_1$

Fixons $j = N_1$, $k \to +\infty$ on trouve

$$\|l(x) - l_{N_1}(x)\|_F \leq \|x\|_E$$

$$\|l(x)\|_F \underset{\text{inég.}}{\leq} \|l_{N_1}(x)\|_F + \|x\|_E$$

$$\leq (|||l_{N_1}||| + 1)\|x\|_E$$

donc $|||l||| \leq |||l_{N_1}||| + 1 < +\infty$.
$l$ continue.

• On a bien $l = \lim_{k \to +\infty} l_k$ dans $\mathcal{L}_c(E,F)$

[pour l'instant on sait seulement que $l(x) = \lim_{k \to +\infty} l_k(x)$ pour tout $x \in E$]

On a vu que si $j,k \geq N_\varepsilon$ alors $\|l_k(x) - l_j(x)\| \leq \varepsilon \|x\|_E$
Fixons $j \geq N_\varepsilon$ et faisons $k \to +\infty$.
On a $\underbrace{\|l(x) - l_j(x)\|_F}_{= \|(l - l_j)(x)\|_F} \leq \varepsilon \|x\|_E$ pour tout $x \in E$
Par conséquent $|||l - l_j||| \leq \varepsilon$ pour $j \geq N_\varepsilon$ et $\lim_{j \to +\infty} l_j = l$ dans $\mathcal{L}_c(E,F)$ CQFD ■

$\boxed{\textbf{Déf:} \text{ On appelle espace de Banach un e.v. normé complet}}$

$(E, \|.\|), (F, \|.\|)$ de Banach $\rightsquigarrow \mathcal{L}_c(E,F)$ Banach.

## Produits d'espaces normés

$\left.\begin{array}{l} E_1, E_2, \dots, E_p \\ \|.\|_1, \|.\|_2, \dots, \|.\|_p \end{array}\right)$ Espaces normés sur $\mathbb{K}$

$E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ muni d'une structure de $\mathbb{K}$-ev.

$(x_1, \dots, x_p) + (y_1, \dots, y_p) = (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p)$

$\lambda (x_1, \dots, x_p) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_p) \quad \lambda \in \mathbb{K}$

Premier choix $\quad x = (x_1, \dots, x_p)$

$\|x\| = \max\limits_{1 \leq i \leq p} (\|x_i\|) \qquad (q = \infty)$

2ème choix: $\|x\|' = \|x_1\| + \dots + \|x_p\| \qquad (q = 1)$

Plus généralement $\quad \|x\|_q = \left(\|x_1\|^q + \dots + \|x_p\|^q\right)^{1/q} \qquad (q \geq 1)$

Ces normes sont toutes équivalentes et on a

$\|x\| \leq \|x\|_q \leq \|x\|' \leq p \|x\|$

EXO: $E_1, \dots, E_p$ Banach $\Leftrightarrow E_1 \times \dots \times E_p$ Banach.

$(x_n)$ suite dans $E = E_1 \times \dots \times E_p$

$x_n = (\underset{E_1}{\underset{\cap}{x_{1,n}}}, \underset{E_2}{\underset{\cap}{x_{2,n}}}, \dots, \underset{E_p}{\underset{\cap}{x_{p,n}}})$

$(x_n)$ de Cauchy dans $E \Leftrightarrow \forall i = 1, 2, \dots p \quad (x_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy dans $E_i$.

## Applications multilinéaires

$\varphi : E_1 \times \dots \times E_p \longrightarrow F$

$(x_1, \dots, x_p) \longmapsto \varphi(x_1, \dots, x_p)$

$\varphi$ est dite multilinéaire (sur le corps $\mathbb{K}$) si pour chaque $i = 1, 2, \dots p$

$x_i \longmapsto \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_p)$ est linéaire lorsque $x_j$ fixé $j \neq i$

$(E_i, \|.\|_i)$ $(F, \|.\|_F)$

**Thm:** Il y a équivalence entre
(i) $\varphi$ est continue au point $(0, \dots, 0) \in E_1 \times \dots \times E_p$
(ii) $\varphi$ est continue sur $E_1 \times \dots \times E_p$
(iii) $\exists$ constante $C \in \mathbb{R}_+$ telle que $\|\varphi(x_1, \dots, x_p)\|_F \leqslant C \|x_1\|_1 \dots \|x_p\|_p$
(iv) $$|||\varphi||| = \sup_{\substack{x_i \in E_i \\ x_i \neq 0}} \frac{\|\varphi(x_1, \dots, x_p)\|_F}{\|x_1\|_1 \dots \|x_p\|_p} < +\infty$$

$$= \sup_{\substack{x_i \in E_i, x_i \leq 1 \\ x_i = 1}} \|\varphi(x_1, \dots, x_p)\|_F$$

**Dem:**
Prenons sur $E_1 \times \dots \times E_p$ la norme $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} \|x_i\|$

(i) $\Rightarrow$ (iii)

$\varepsilon = 1$ $\exists \delta > 0$ $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} \|x_i\| \leqslant \delta \Rightarrow \|\varphi(x_1, \dots, x_p)\|_F \leqslant \varepsilon = 1$

$$\forall i \ \|x_i\| \leqslant r_i \Rightarrow \|\varphi(x_1, \dots, x_p)\|_F \leqslant \frac{r_1 \dots r_p}{\delta^p}$$

En prenant $r_i = \|x_i\|_i$ je trouve $\|\varphi(x_1, \dots x_p)\|_F \leqslant \frac{1}{\delta^p} \|x_1\|_1 \dots \|x_p\|_p$
(iii) vrai avec $C = \frac{1}{\delta^p}$

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv) évident (ii) $\Rightarrow$ (i) aussi

(iii) $\Rightarrow$ (ii) (iii) $\Rightarrow$ $\varphi$ continue partout
Faisons le pour $p = 2$

$$\varphi(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - \varphi(x_1, x_2) = \varphi(h_1, x_2) + \varphi(x_1, h_2) + \varphi(h_1, h_2)$$

$$\|\varphi(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - \varphi(x_1, x_2)\|_F \leqslant C(\|h_1\|_1 \|x_2\|_2 + \|x_1\|_1 \|h_2\|_2 + \|h_1\| \|h_2\|) \leqslant \varepsilon$$

Prenons $\max(\|h_1\|, \|h_2\|) \leq r$
$(h_1, h_2) \in B_{E_1 \times E_2, f}(0, r)$

$$\|\varphi(x_1+h_1, x_2+h_2) - \varphi(x_1, x_2)\|_F \leq \underbrace{C(r\|x_2\|_2 + r\|x_1\|_1 + r^2)}_{maj.}$$

Prenons $r \leq 1$ alors $r^2 \leq r$
majorant $\leq Cr(\|x_1\|_1 + \|x_2\|_2 + 1) \leq \varepsilon$
Il suffit de prendre $r = \min\left(1, \dfrac{\varepsilon}{C(\|x_1\|_1 + \|x_2\|_2 + 1)}\right)$

et on voit donc que $\varphi$ est continue au point $(x_1, x_2)$

Remarque: le rayon $r$ dépend de $x_1, x_2$, il n'y a pas de raison que $\varphi$ soit uniformément continue

Notation: $\mathcal{L}_c(E_1, E_2, \dots, E_p ; F)$ = espace des applications multilinéaires continues $E_1 \times \dots \times E_p \xrightarrow{\varphi} F$
C'est un espace de Banach dès que F est un espace de Banach

## Algèbres de Banach

$(A, +, \times, \cdot, \|.\|)$

Algèbre sur $\mathbb{K}$:
- $(A, +, \times)$ anneau unitaire $(1_A)$ pas forcément commutatif
- $(A, +, \cdot)$ $\mathbb{K}$-ev
- Compatibilité de $\times$ et $\cdot$
  $(\lambda \cdot x) \times y = \lambda \cdot (x \times y) = x \times (\lambda \cdot y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in A$

- $(A, +, \times, \cdot, \|.\|)$ espace de Banach
- $\begin{cases} \|x \times y\| \leq \|x\| \, \|y\| \text{ pour tous } x, y \in A \\ \|1_A\| = 1 \end{cases}$

## Exemple fondamental

$(E, \|.\|_E)$ espace de Banach

$A = \mathcal{L}_c(E,E)$ $|||l|||$

$(A, +, \circ, \cdot, |||.|||)$ algèbre de Banach.

$|||m \circ l||| \leq |||m|||\,|||l|||$ déjà vu.

$Id_E$ élément neutre pour $\circ$

$Id_E \circ l = l \circ Id_E = l$

$|||Id_E||| = 1$

$\|Id_E(x)\|_E = \|x\|_E \leq 1 . \|x\|_E$

---

$E = \mathbb{K}^n$ par exemple $\|x\| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

$$\mathcal{L}_c(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n) = \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n) \longleftrightarrow Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$$
$$l \longleftrightarrow M$$

$$(\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n), +, \circ, \cdot, |||.|||) \longleftrightarrow (Mat_{n\times n}(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$$

| | |
|---|---|
| $l_1 + l_2$ | $M_1 + M_2$ |
| $l_1 \circ l_2$ | $M_1 \times M_2$ |
| $\lambda l$ | $\lambda M$ |
| $|||l|||$ | $|||M|||$ ? |

$|||M||| = \sup\limits_{X \neq 0} \dfrac{\|MX\|}{\|X\|}$ $\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\quad \|X\| = \max |x_i|$

→ Cette norme dépend de la norme choisie sur les matrices colonnes [mais elles sont toutes équivalentes]

## Exponentielle dans une algèbre de Banach

$(A, +, \times, \cdot, \|.\|)$ de Banach

**Déf:** $\exp(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{k!} x^k$ pour $x \in A$

$$\left\|\frac{1}{k!}x^k\right\| \leqslant \frac{1}{k!}\|x\|^k$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left\|\frac{1}{k!}x^k\right\| \leqslant \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\|x\|^k}_{\in\mathbb{R}_+} = \underbrace{e^{\|x\|}}_{\in\mathbb{R}_+}$$

Conclusion: la série est normalement CV donc $\exp(x)\in A$ existe; car $A$ est complet

**Proposition:** Si $x, y \in A$ commutent ($x\times y = y\times x$) alors
$\exp(x+y) = \exp(x)\times\exp(y)$

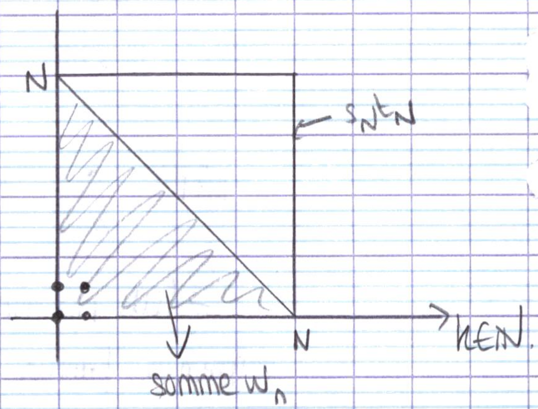
**Dem:** $\exp(x) = \lim\limits_{N\to+\infty} S_N \qquad S_N = \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}x^k$

$\exp(y) = \lim\limits_{N\to+\infty} t_N \qquad t_N = \sum_{l=0}^{N}\frac{1}{l!}y^l$

$\exp(x+y) = \lim\limits_{N\to+\infty} w_N \qquad w_N = \sum_{m=0}^{N}\frac{1}{m!}(x+y)^m$

$$(x+y)^m \underset{\text{binôme}}{=} \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^k y^{m-k}$$

$$= \sum_{\substack{k,l\geqslant 0\\ k+l=m}}\frac{m!}{k!\,l!}x^k y^l$$




$$w_N = \sum_{\substack{k,l\geqslant 0\\ k+l\leqslant N}}\frac{1}{k!\,l!}x^k y^l$$

$$S_N t_N = \sum_{\substack{k,l\geqslant 0\\ k\leqslant N,\ l\leqslant N}}\frac{1}{k!\,l!}x^k y^l$$

$$S_N t_N - w_N = \sum_{\substack{k,l\geqslant 0\\ k,l\leqslant N\ \ k+l>N}}\frac{1}{k!}\frac{1}{l!}x^k y^l$$

$$\frac{1}{k!}\frac{1}{l!} = \frac{1}{(k+l)!}\binom{k+l}{k}$$

$$\binom{n}{k} \leqslant 2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

$$\|\Delta_N\| \leqslant \frac{2^{2N}}{N!} \times (N+1)^2 \times M^{2N} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad M = \max(\|x\|, \|y\|, 1)$$

$$\frac{1}{k!}\,\frac{1}{l!} \leqslant \frac{2^{2N}}{N!} \qquad \begin{matrix} k+l \leqslant 2N \\ k+l \geqslant N \end{matrix}$$

$\blacksquare$

Cas particulier $y = -x$ (commute avec $x$)

$\exp(x)\exp(-x) = \exp(0) = 1_A$.

$\exp(x)$ élément inversible de $A$

$(\exp(x))^{-1} = \exp(-x)$

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} M^k$$

Exo : $M = PDP^{-1}$ $\boxed{\exp(M) = P\exp(D)P^{-1}}$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \exp(D) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$