Thm: $f : E \to E'$ lipschitzienne ou höldérienne alors f est uniformément continue sur E.

Exos: 1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue

2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{|x|}$

$$|g(x) - g(y)| = \left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right| \underset{\text{exo}}{\leq} \sqrt{|x-y|} = d(x,y)^{1/2}$$

g höldérienne d'exposant $\frac{1}{2}$ et de constante $\lambda = 1$
$\Rightarrow g$ uniformément continue sur $\mathbb{R}$

g n'est pas lipschitzienne

$$|g(x)| = |g(x) - g(0)| \overset{?}{\leq} \lambda |x - 0| = \lambda |x|$$

$$\sqrt{|x|} \overset{?}{\leq} \lambda |x| \iff 1 \leq \lambda \sqrt{|x|}$$

jamais vrai près de 0.

3) $g : I \to \mathbb{R}$ dérivable
g λ-lipschitzienne $\iff |g'| \leq \lambda$. (Thm accroissements finis)

20/10/2014

Norme d'une application linéaire

E, F espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$

Thm: Pour une application linéaire $l \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ (= espace des applications $\mathbb{K}$-linéaires $E \to F$) il y a équivalence entre les propriétés suivantes:

(1) l est continue au point 0_E.

(2) ℓ est continue sur E tout entier

(3) ℓ est lipschitzienne $E \longrightarrow F$

(4) $\exists C \in \mathbb{R}_+, \ \forall x \in E \quad \|\ell(x)\|_F \leqslant C \|x\|_E$

(5) La quantité

$$|||\ell||| \underset{\text{def}}{=} \sup_{x \in E \setminus \{0_E\}} \frac{\|\ell(x)\|_F}{\|x\|_E} < +\infty.$$

De plus $|||\ell||| = \sup_{x \in E, \|x\|_E = 1} \|\ell(x)\|_F = \sup_{x \in E, \|x\|_E \leqslant 1} \|\ell(x)\|_F$

Dem: (1) => (4)

ℓ est continue en 0_E $\quad \ell(0_E) = 0_F$

Fixons $\varepsilon = 1$

Continuité en 0_E donne:

$\exists \delta > 0 \ \forall x \in E \quad d_E(x, 0_E) \leqslant \delta \Rightarrow d_F(\ell(x), 0_F) \leqslant \varepsilon = 1$

$\|x\|_E \leqslant \delta \Rightarrow \|\ell(x)\|_F \leqslant 1$

Prenons $x \in E$ quelconque, $x \neq 0$.

$\begin{cases} x' = \lambda x \text{ a pour norme } \|x'\|_E = \lambda \|x\|_E \\ \lambda > 0 \end{cases}$

Choisissons $\lambda = \frac{1}{\|x\|_E} \delta$ de sorte que $\|x'\|_E = \delta$.

On en déduit $\|\ell(x')\|_F = \lambda \|\ell(x)\|_F \leqslant 1$

$\Rightarrow \|\ell(x)\|_F \leqslant \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\delta} \|x\|_E$

On dilate la boule $B(0_E, \delta)$ pour avoir x qu'on voulait.

$\Rightarrow$ (4) vraie avec $C = \frac{1}{\delta}$.

(4) => (5) en effet, (4) $\Rightarrow \frac{\|\ell(x)\|_F}{\|x\|_E} \leqslant C$ pour $x \neq 0_E$ et donc le sup est fini.

(5) => (4) Si $M = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|\ell(x)\|_F}{\|x\|_E}$ on peut prendre $C = M$ (en fait c'est la + petite constante possible qu'on note $|||\ell|||$).

(4) => (3) $\forall x, y \in E \quad d_F(\ell(x), \ell(y)) = \|\ell(y) - \ell(x)\|_F$

$\underset{\text{linéarité}}{=} \|\ell(y - x)\|_F$

$d_F(l(x), l(y)) \overset{(4)}{\leq} C\|y-x\|_E$
$\leq C\, d_E(x,y)$.

donc l est C-lipschitzienne et on peut prendre $C = |||l|||$

(3) $\Rightarrow$ (2) l lipschitzienne $\Rightarrow$ l continue sur E

(2) $\Rightarrow$ (1) l continue sur E $\Rightarrow$ l continue en 0_E

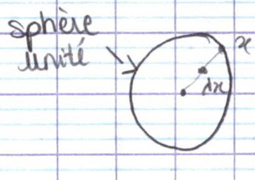
Reste à vérifier

$$\underbrace{\sup_{x\in E\setminus\{0_E\}} \frac{\|l(x)\|_F}{\|x\|_E}}_{①} = \underbrace{\sup_{x\in E,\, \|x\|_E=1} \|l(x)\|_F}_{②} = \underbrace{\sup_{x\in E,\, \|x\|_E\leq 1} \|l(x)\|_F}_{③}.$$

① $\geq$ ② puisque ① porte sur tous les $x \neq 0_E$ et que $\frac{\|l(x)\|_F}{\|x\|_E} = \|l(x)\|_F$ pour $\|x\|_E = 1$.

En fait $\frac{\|l(x)\|_F}{\|x\|_E} = \|l(\underbrace{\frac{1}{\|x\|_E}x}_{x' \text{ de norme } 1})\|_F \leq$ ②. donc ① $\leq$ ②.
pour $x\in E\setminus\{0_E\}$

③ $\geq$ ② clair (+ d'éléments dans ③)



$\lambda \in [0,1]$

$\|l(\lambda x)\|_F = \lambda \|l(x)\|_F$
$\leq \|l(x)\|_F$

donc ③ $\leq$ ②. ■

<u>Notation</u>: $\mathcal{L}_c(E,F)$ (ou $\mathcal{L}_{c,\mathbb{K}}(E,F)$) désigne l'ensemble des applications $\mathbb{K}$-linéaires continues de E dans F

<u>Proposition</u>: $l \longmapsto |||l|||$ est bien une norme sur le $\mathbb{K}$-ev $\mathcal{L}_c(E,F)$

$(E, \|.\|_E)\ (F, \|.\|_F) \rightsquigarrow (\mathcal{L}_c(E,F), |||.|||)$

où $|||.|||$ dépend des normes $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$

<u>Remarque</u>: $\forall x \in E \quad \|l(x)\|_F \leq |||l|||\, \|x\|_E$

où $|||l|||$ est la "meilleure" constante possible.

Dem : • Si $|||\ell||| = 0$ on a bien $\|\ell(x)\|_F = 0$ pour tout $x \in E$ donc $\ell(x) = 0_F$ (car $\|.\|_F$ norme) $\Rightarrow \ell = 0$.

• $\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{L}_c(E,F)$

$$\|(\ell_1+\ell_2)(x)\|_F = \|\ell_1(x)+\ell_2(x)\|_F \underset{\text{inég } \Delta F}{\leqslant} \|\ell_1(x)\|_F + \|\ell_2(x)\|_F$$

$$\underset{\text{def } |||.|||}{\leqslant} |||\ell_1|||\,\|x\|_E + |||\ell_2|||\,\|x\|_E$$

$$= (|||\ell_1||| + |||\ell_2|||)\,\|x\|_E$$

$C = |||\ell_1||| + |||\ell_2|||$ dans la propriété (4)

donc $\ell_1+\ell_2 \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $|||\ell_1+\ell_2||| \leqslant |||\ell_1||| + |||\ell_2|||$

• $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ $|||\lambda\ell||| = |\lambda|\,|||\ell|||$ évident.

Exemples :

(a) $E = \mathbb{K}^n$ avec $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$

$(e_1, \dots, e_n)$ base canonique

$e_i = (0, \dots, \underset{i}{1}, \dots 0) \in \mathbb{K}^n$ $\qquad x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

Soit $\ell : \mathbb{K}^n \longrightarrow F$ à valeurs dans $(F, \|.\|_F)$

$\ell(x) = \ell\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i \ell(e_i)$

$\|\ell(x)\|_F \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i|\,\|\ell(e_i)\|_F$

$$\leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \sum_{i=1}^n \|\ell(e_i)\|_F$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n \|\ell(e_i)\|_F\right) \|x\|_\infty$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^n \|\ell(e_i)\|_F\right) \|x\|_p .$$

Théorème : Si $E = \mathbb{K}^n$ avec $\|.\|_p$, toute application linéaire $\ell : E \longrightarrow F$ est continue et on a

$$|||\ell||| \leqslant \sum_{i=1}^n \|\ell(e_i)\|_F .$$

(b) En fait, si $\dim_{\mathbb{K}} E$ est finie, on verra plus tard que toute application linéaire est continue.

(c) Formes linéaires $l : E \to \mathbb{K}$, $\mathbb{K}$ muni de $|.|$

$$|||l||| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{|l(x)|}{\|x\|_E} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E = 1}} |l(x)|$$

$E = \mathbb{K}^n$ avec norme $\|.\|_p$

$$l : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$$
$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 + \ldots + x_n$$

On a une norme $|||l|||_p = \sup_{x \in \mathbb{K}^n, \|x\|_p = 1} |l(x)|$

- $p = \infty$ $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|)$

si $\|x\|_\infty = 1$ on a $\max(|x_i|) = 1$

et $\sup \underbrace{|x_1 + \ldots + x_n|}_{|l(x)|} \leq n$

et cette valeur est atteinte pour $x_1 = \ldots = x_n = 1$.

On a donc $|||l|||_\infty = n$

- $p = 1$ $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

On a clairement $|l(x)| = |x_1 + \ldots + x_n| \leq \|x\|_1 = 1 . \|x\|_1$

↳ pas améliorable ($x = e_i$)

On trouve donc $|||l|||_1 = 1$.

EXO : pour $\|.\|_p$, $x = (1, \ldots, 1)$

$|l(x)| = n$ $\|x\|_p = n^{1/p}$.

Vérifier que $|||l|||_p \leq \frac{n}{n^{1/p}} = n^{1 - 1/p}$.

Inégalité de Hölder (généralisation de Cauchy-Schwarz)

$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leq \|x\|_p \|y\|_q$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (exposants conjugués)

$$q = \frac{1}{1 - 1/p}$$

$p=q=2$: Cauchy-Schwarz

$\ell(x) = (x_1, \dots, x_n) \cdot (1, \dots, 1)$

$|\ell(x)| \underset{\text{Hölder}}{\leqslant} \|x\|_p \, \|(1, \dots, 1)\|_q$ où $\|(1, \dots, 1)\|_q = n^{1-\frac{1}{p}}$

(d) Exemple en dim infinie

$E = \mathbb{R}[X]$

$\|P\| = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$

$$D : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ P \longmapsto P' \end{array}$$ application linéaire

$P = X^n \qquad \|P\| = \sup_{x \in [0,1]} |x^n| = 1$

$P' = n X^{n-1} \qquad \|P'\| = n$

$\dfrac{\|D(P)\|}{\|P\|} = \dfrac{\|P'\|}{\|P\|} = n$ non borné.

donc $|||D||| = +\infty$.

D n'est pas continue !

Pourtant $D_{|\mathbb{R}[X]_{\leqslant n}}$ est continue

Autre norme $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$

$\|P\|_m = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i|$ est une autre norme

$C \, \|P_m\| \leqslant \|P\| \leqslant m \, \|P\|_m$ sur $\mathbb{R}[X]_{\leqslant n}$

constante à trouver

Utilisation des polynômes de Lagrange
interpolation

a_i = formule linéaire à partir des $P(\frac{k}{n})$

(interpolation de Lagrange)

Composée d'applications linéaires

$$E \xrightarrow{l} F \xrightarrow{m} G$$

Proposition: $l \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $m \in \mathcal{L}_c(F,G)$ alors $m \circ l \in \mathcal{L}_c(E,G)$
et $|||m \circ l||| \leq |||m|||\,.\,|||l|||$

Dem: $\|m \circ l(x)\|_G = \|m(l(x))\|_G \leq |||m|||\ \|l(x)\|_F$
$\leq \underbrace{|||m|||\ |||l|||}_{C}\ \|x\|_E$ ■

Cas particulier: $A = \mathcal{L}_c(E,E)$ $\mathbb{K}$-algèbre normée
$(A,+,\circ,.)$
$|||l^k||| \leq |||l|||^k$

Théorème: $(F,\|.\|_F)$ complet $\Rightarrow (\mathcal{L}_c(E,F), |||.|||)$ complet.

22/10/2014

Dem: $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suite de Cauchy, $l_k \in \mathcal{L}_c(E,F)$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall j,k \in \mathbb{N},\ j,k \geq N_\varepsilon \Rightarrow |||l_k - l_j||| \leq \varepsilon$
Fixons $x \in E$ et regardons $l_k(x) \in F$
$\|l_k(x) - l_j(x)\|_F = \|(l_k - l_j)(x)\|_F$
$\leq |||l_k - l_j|||\ \|x\|_E \leq \varepsilon \|x\|_E$ si $j,k \geq N_\varepsilon$.

Conclusion: $x \in E$ étant fixé, $(l_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans F. Elle a donc une limite $l(x) = \lim_{k\to+\infty} l_k(x)$

- $l \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$? $l(\lambda x + \mu y) = \lim_{k\to+\infty} l_k(\lambda x + \mu y)$

$$\underset{l_k \text{ linéaire}}{=} \lim_{k\to+\infty} \lambda l_k(x) + \mu l_k(y)$$

$$= \lambda l(x) + \mu l(y).$$