

Démonstration :

par récurrence sur n , $n \geq 3$.

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n'} \times \mathbb{R}^{n''} \text{ avec } n + n'' = n.$$

$$x = (x', x'') \quad x' = (x_1, \dots, x_{n'}) \quad x'' = (x_{n'+1}, \dots, x_{n'+n''}).$$

$$N'(x') = \|x'\|_p \text{ dans } \mathbb{R}^{n'}.$$

$$N''(x'') = \|x''\|_p \text{ dans } \mathbb{R}^{n''} \quad N(x) = \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

$$N(x) = (N'(x')^p + N''(x'')^p)^{1/p}$$

$$N(x+y) \quad \left. \begin{array}{l} x = (x', x'') \\ y = (y', y'') \end{array} \right\} x+y = (x'+y', x''+y'').$$

résultat N' dans $\mathbb{R}^{n'}$, N'' dans $\mathbb{R}^{n''}$ et dans $\mathbb{R}^n \Rightarrow$ résultat pour N dans \mathbb{R}^n .
normes

4) Normes équivalentes.

Définition : Soit E un ev sur $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

On considère 2 normes N_1, N_2 .

$$\|x\|_1 = N_1(x), \quad \|x\|_2 = N_2(x).$$

On écrit $N_1 \sim N_2$ ou $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ si $\exists c, c' > 0$ constantes telles que $\forall x \in E \quad c'N_1(x) \leq N_2(x) \leq cN_1(x)$. (*)

C'est bien une relation d'équivalence, et on dit que les normes sont équivalentes.

(i) Réflexive: si $N_1 = N_2$ on prend $c = c' = 1$.

(ii) $N_1 \sim N_2 \Rightarrow N_2 \sim N_1$. (*) $\Rightarrow c'N_2(x) \leq N_1(x) \leq (c')^{-1}N_2(x)$. (symétrique)

(iii) $N_1 \sim N_2$ et $N_2 \sim N_3 \Rightarrow N_1 \sim N_3$ (ex). (transitivité).

Propriétés sur les boules associées :

$$\text{comparons } \left\{ \begin{array}{l} B_{N_1}(x, r) \\ B_{N_2}(x, r) \end{array} \right.$$

$$N_1(x) < r \Rightarrow N_1(x) < cr$$

$$B_{N_1}(x, r) \subset B_{N_2}(x, cr)$$

$$N_2(x) < r \Rightarrow N_2(x) < (c')^{-1}r$$

$$B_{N_2}(x, r) \subset B_{N_1}(x, (c')^{-1}r).$$

Conséquence : Le remplacement d'une norme par une norme équivalente ne change pas les notions de limites ou de continuité.

Exemple:

Sur K^n , $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$.

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

$$\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Rem: $\|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p$.

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty.$$

↑
la somme est plus grande que chaque terme.

↑
 n termes $\leq \|x\|_\infty^p$
somme $\leq n \|x\|_\infty^p$
(somme) $^{1/p} \leq n^{1/p} \|x\|_\infty$.

Csq: les normes $\|\cdot\|_p$ sont toutes équivalentes à $\|\cdot\|_\infty$ (et donc équivalentes entre elles).

De plus, $\lim_{p \rightarrow \infty} n^{1/p} = \lim_{p \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{\ln(n)}{p}\right) = 1$.

Comparaison de $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_q$?

Proposition: $p \mapsto \|x\|_p$ décroissante.

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \|x\|_1, \quad \forall p \in [1; +\infty[.$$

Démonstration:

• $f(p) = (1+t^p)^{1/p}$ $t \geq 0$ décroissante de p ?

$$q \geq p \quad (1+t^q)^{1/q} \stackrel{?}{\leq} (1+t^p)^{1/p}$$

$$u = t^p \Leftrightarrow t = u^{1/p} \Leftrightarrow t^q = u^{q/p}$$

$$(1+u^{q/p})^{1/q} \stackrel{?}{\leq} (1+u)^{1/p} \Leftrightarrow 1+u^{q/p} \stackrel{?}{\leq} (1+u)^{q/p}$$

$$\alpha = \frac{q}{p} \geq 1 \quad (1+u)^\alpha - (1+u^\alpha) \stackrel{?}{\geq} 0 \quad \text{pour } u \geq 0.$$

$$g(u) = (1+u)^\alpha - (1+u^\alpha)$$

$$g'(u) = \alpha [(1+u)^{\alpha-1} - u^{\alpha-1}] > 0$$

$$g(0) = 0 \Rightarrow g(u) \geq 0 \quad \forall u \in [0; +\infty[.$$

• $\mathbb{R} \quad (|x_1|^p)^{1/p} = |x_1|$ normes toutes égales.

$$\mathbb{R}^2 \quad (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p} = |x_1| \left(1 + \left(\frac{|x_2|}{|x_1|}\right)^p\right)^{1/p} \quad \text{si } x_1 \neq 0.$$

$t = \frac{|x_2|}{|x_1|} \rightarrow$ fonction décroissante de p .

$$\cdot \mathbb{R}^n (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p} = |x| (1 + \|t\|_p^p)^{1/p} \quad t = \left(\frac{|x_2|}{|x_1|}, \dots, \frac{|x_n|}{|x_1|} \right) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

$q \geq p$ par récurrence sur la dimension.

$$\|t\|_q \leq \|t\|_p$$

$$(1 + \|t\|_q^q)^{1/q} = (1 + \|t\|_q^q)^{1/q} \leq (1 + \|t\|_p^q)^{1/q} = (1 + \|t\|_p^p)^{1/p} \leq (1 + \|t\|_p^p)^{1/p} \quad \square$$

IV. Espaces $\ell^p(A, \mathbb{K})$.

Définition: $\ell^p(A, \mathbb{K}) = \{ (x_\alpha)_{\alpha \in A} ; \sum_{\alpha \in A} |x_\alpha|^p < +\infty \}$.

$$x = (x_\alpha)_{\alpha \in A}, \quad \|x\| = \left(\sum_{\alpha \in A} |x_\alpha|^p \right)^{1/p}$$

Définition: D'une somme $\sum_{\alpha \in A} u_\alpha$ $u_\alpha \in \mathbb{R}^+$ dans un espace métrique.

$$\sum_{\alpha \in A} u_\alpha = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{ u_{\alpha_1} + \dots + u_{\alpha_n}, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in A \text{ distincts quelconques} \} \in [0; +\infty]$$

On dit que $(u_\alpha)_{\alpha \in A}$ est sommable $\sum_{\alpha \in A} u_\alpha < \infty$.

Proposition: Si $\sum_{\alpha \in A} u_\alpha < +\infty$ alors $\{ \alpha \in A ; u_\alpha > 0 \}$ est dénombrable = $\text{Supp}(u_\alpha)$.

Démonstration:

$$S = \sum_{\alpha \in A} u_\alpha \in \mathbb{R}_+$$

$$E_n = \{ \alpha \in A \mid u_\alpha \geq \frac{1}{n} \} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$S \geq \text{card } E_n \times \frac{1}{n} \Rightarrow \text{card } E_n \leq nS \Rightarrow E_n$ ensemble fini.

$$\text{supp}(u_\alpha) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E_n \text{ ensemble dénombrable. } \square$$

Rem: "Une somme non dénombrable de quantités > 0 ne peut pas être finie".

Au plus, une suite dénombrable : $u_0, u_1, \dots, u_n, \dots$ $n \in \mathbb{N}$ de coef $\neq 0$.

$$\sum_{\alpha \in A} u_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{u_n}_{\text{coef} \neq 0}$$

$x = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$ $\|x\|_p$ fonction décroissante de p .

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de coef $\neq 0$.

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} = \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\sum_{n=0}^N |x_n|^p \right)^{1/p}}_{\text{fonction } \downarrow \text{ de } p}$$

proposition: $p \leq q \Rightarrow \ell^p(A, \mathbb{K}) \subset \ell^q(A, \mathbb{K})$.

Démonstration:

$$x \in \ell^p(A, \mathbb{K}) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \|x\|_p < \infty \Rightarrow \|x\|_q \leq \|x\|_p < +\infty \\ \Rightarrow x \in \ell^q(A, \mathbb{K}) \quad \square$$

Exemples importants: $A = \mathbb{N}$; $A = \mathbb{Z}$.

$$\ell^p(\mathbb{Z}, \mathbb{K}) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

Alors si $p < q$, $\ell^p(\mathbb{Z}, \mathbb{K}) \subsetneq \ell^q(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$.

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq 0 \\ \frac{1}{n^\alpha} & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p\alpha}} \right)^{1/p} \quad \text{choisissons } p\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{p}.$$

si $p < q \Leftrightarrow \frac{1}{q} < \frac{1}{p} \quad \forall \alpha \in]\frac{1}{q}; \frac{1}{p}[$ alors $x \in \ell^q(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$
 $x \notin \ell^p(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$.

$$\text{Ici, } \|x\|_q = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{q\alpha}} \right)^{1/q} \quad q\alpha > 1$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p\alpha}} \right)^{1/p} \quad p\alpha < 1.$$

$\|\cdot\|_p$ n'est pas définie sur $\ell^q(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$.

En revanche, $\|\cdot\|_p, \|\cdot\|_q$ sont deux normes sur $\ell^p(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ mais elles ne sont pas équivalentes.

$$x = (0, \dots, 0, \dots, \underset{n=0}{0}, \underset{1}{1}, \dots, \underset{N}{1}, 0, \dots, \dots)$$

$$\|x\|_p = N^{1/p} \quad \|x\|_q = N^{1/q} \leq \|x\|_p \text{ pour } q \geq p.$$

$$\frac{\|x\|_p}{\|x\|_q} = N^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} +\infty.$$

\Rightarrow en espace infini, les normes ne sont pas équivalentes de manière générale.

V. Fonctions uniformément continues.

Définition: $(E, d), (E', d')$ espaces métriques.

(1) $f: E \rightarrow E'$ est dite lipschitzienne de rapport λ si $\forall x, y \in E \quad d'(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$
 $\lambda \in \mathbb{R}^+$

(2) $f: E \rightarrow E'$ est dite höldérienne d'exposant $\alpha > 0$ et de constante $\lambda \in \mathbb{R}^+$ si $\forall x, y \in E, d'(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)^\alpha$.

Rem. lipschitzienne = höldérienne d'exposant $\alpha = 1$.

Proposition: Si f est höldérienne alors f est une fonction continue.

Démonstration:

$\lambda = 0 \Leftrightarrow$ fonction constante

Continuité $x_0 \in E$, je veux $d(f(x), f(x_0)) \leq \epsilon$

on sait que $d(f(x), f(x_0)) \leq \lambda d(x, x_0)^\alpha$

il suffit que $\lambda d(x, x_0)^\alpha \leq \epsilon \Leftrightarrow d(x, x_0) \leq \left(\frac{\epsilon}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ (avec $\lambda > 0$).

On a bien $d(x, x_0) \leq \left(\frac{\epsilon}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) \leq \epsilon$. \square

Définition: On dit que $f: E \rightarrow E'$ est uniformément continue si

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0, \forall x_0 \in E, \forall x \in E, d(x, x_0) \leq \delta_\epsilon \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) \leq \epsilon$.

Continuité "tout court", en chaque point x_0 :

$\forall x_0 \in E, \forall \epsilon > 0, \exists \delta_{x_0, \epsilon} > 0, \forall x \in E, d(x, x_0) \leq \delta_{x_0, \epsilon} \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) \leq \epsilon$.

Théorème: $f: E \rightarrow E'$ lipschitzienne ou höldérienne alors f est uniformément continue sur E .

Exercice:

1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue.

2) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sqrt{|x|}$

$$|g(x) - g(y)| = |\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}| \underset{x \neq y}{\leq} \sqrt{|x - y|} = d(x, y)^{1/2}$$

g höldérienne d'exposant $\frac{1}{2}$ et de constante $\lambda = 1$.

$\Rightarrow g$ uniformément continue sur \mathbb{R} .

g n'est pas lipschitzienne.

$$|g(x)| = |g(x) - g(0)| \leq \lambda |x - 0| = \lambda |x|.$$

$$\sqrt{|x|} \leq \lambda |x| \Leftrightarrow 1 \leq \lambda \sqrt{|x|} \text{ jamais vrai près de } 0.$$

3) $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

g λ -lipschitzienne $\Leftrightarrow |g'| \leq \lambda$. (résulte du thm des accroissements finis).