Là

$A = ]a;+\infty[ \qquad f_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$

$$\|f_n\|_{\ell^\infty(A,\mathbb{R})} = \frac{1}{n^a}$$

$$\sum \|f_n\|_{\ell^\infty(A,\mathbb{R})} < \infty \iff \sum \frac{1}{n^a} \text{ cv} \iff a > 1.$$

- CVN sur $]a;+\infty[$ ssi $a > 1$.
- Montrer qu'il y a CVU sur tout intervalle $]a;+\infty[$ $a > 0$.

$S(x) - S_n(x) = R_n(x) \qquad |R_n(x)| \leq \dfrac{1}{(n+1)^x}$.

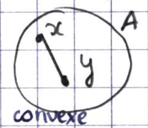
# III. Normes et convexité :

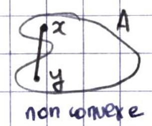
## 1). Définition des ensembles convexes.

$E$ ev sur $\mathbb{R}$. (ou sur $\mathbb{C}$).

Définition : Une partie $A$ de $E$ est dite convexe si $\forall x, y \in A$, $[x,y] \subset A$

où $[x,y] = \{(1-t)x + ty \ ; \ t \in [0;1]\}$.



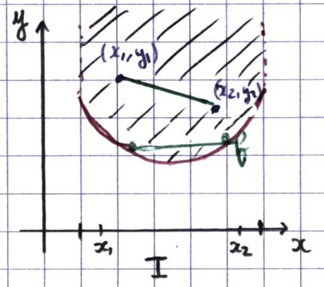




## 2) Fonctions convexes et concaves.

$I$ intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition : Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe si "l'épigraphe"

$\Gamma_f^+ = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R} \ ; \ y \geq f(x)\}$ est convexe.




$y_1 \geq f(x_1)$

$y_2 \geq f(x_2)$

Regardons la corde reliant $(x_1, f(x_1))$ à $(x_2, f(x_2))$.

segment $(x_1,y_1) \rightsquigarrow (x_2,y_2)$ $\quad [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\ t \longmapsto ((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2)$

corde $(x_1, f(x_1)) \rightsquigarrow (x_2, f(x_2))$ $\quad [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\ t \longmapsto ((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)f(x_1) + tf(x_2))$

$y_1 \geq f(x_1)$ et $y_2 \geq f(x_2) \Rightarrow$ segment "au dessus" de la corde.

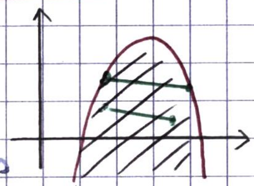
$$(1-t)y_1 + ty_2 \geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

**Conclusion :** L'épigraphe est convexe si et seulement si toutes les cordes sont situées au dessus du graphe.

caractérisation : $f$ est convexe ssi $\forall x_1, x_2 \in I$, $\forall t \in [0;1]$ $f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$

**Définition** : Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite concave si "l'épigraphe"

$\Gamma_f^- = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R} \; ; \; y \leq f(x)\}$ est concave



$f$ est concave $\Leftrightarrow$ toutes les cordes sont situées sous le graphe

$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I$ $\forall t \in [0;1]$ $f((1-t)x_1 + tx_2) \geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$.

**Remarque** : $f$ concave $\Leftrightarrow$ $-f$ convexe

$f$ convexe $\Leftrightarrow$ $-f$ concave.

**Théorème** : Supposons $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable.

- $f$ convexe $\Leftrightarrow f'' \geq 0 \Leftrightarrow f'$ croissante.
- $f$ concave $\Leftrightarrow f'' \leq 0 \Leftrightarrow f'$ décroissante.

**Démonstration (pour la convexité)** :

(1) $f'' \geq 0 \Rightarrow f$ convexe ?

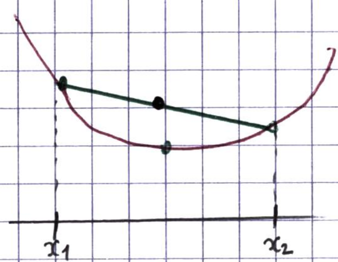
$f'$ croissante.

Prenons $x_1, x_2 \in I$ et posons $g(t) = f((1-t)x_1 + tx_2) - \underline{((1-t)f(x_1) + t f(x_2))}$

À démontrer $g(t) \leq 0$ pour $t \in [0;1]$.

$g'(t) = (x_2 - x_1) f'((1-t)x_1 + tx_2)$

$= (x_2 - x_1)\left[ f'((1-t)x_1 + tx_2) - \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right]$




Supposons par exemple $x_1 < x_2$.

$g(0) = g(1) = 0$.

$g'$ croissante par rapport à $t$

$\exists c \in ]0;1[$ où $g$ atteint son minimum.

$g'(c) = 0 \Leftrightarrow$ en $x = (1-c)x_1 + cx_2$ on a $f'(x) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

| $t$ | $0$ | $c$ | $1$ |
| --- | --- | --- | --- |
| $g'(t)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $g(t)$ | $0$ | $\searrow \quad \nearrow$ | $0$ |

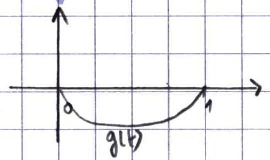
$g'(t) \leq 0$ sur $[0;c]$

$g'(t) \geq 0$ sur $[c;1]$.

$\Rightarrow g(t) \leq 0$ sur $[0;1]$.

② $f$ convexe $\Rightarrow f'' \geq 0$ ?

Hypothèse de convexité $\Rightarrow g(t) \leq 0$ sur $[0;1]$.



$$g'(0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{g(t)}{t} \leq 0.$$

$$g'(1) = \lim_{h \to 0^+} \frac{g(1-h)}{-h} \geq 0.$$

$$g'(0) = (x_2 - x_1)\left(f'(x_1) - \tau_f(x_1, x_2)\right) \leq 0$$

$$g'(1) = (x_2 - x_1)\left(f'(x_2) - \tau_f(x_1, x_2)\right) \geq 0.$$

$$f'(x_1) \leq \tau_f(x_1, x_2) \leq f'(x_2)$$

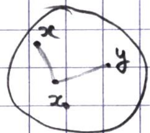
et ceci est vrai $\forall x_1, x_2 \in I$ avec $x_1 < x_2$.

On a donc $f'$ croissante au sens large $\Rightarrow f'' \geq 0$. ■

### 3) Relation avec les normes.

**Proposition** : Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace normé, les boules ouvertes et fermées sont des convexes.

**Démonstration** : (pour une boule ouverte).



$A = B(x_0, r)$ $\quad x, y \in A$

on a $\|x - x_0\| < r$ et $\|y - x_0\| < r$.

Pour $t \in [0;1]$ $\|t(x - x_0) + (1-t)(y - x_0)\| \underset{\text{inég tri}}{\leq} \|t(x - x_0)\| + \|(1-t)(y - x_0)\|$

$= t\|x - x_0\| + (1-t)\|y - x_0\|$

$< tr + (1-t)r = r$

On trouve bien $\|tx + (1-t)y - x_0\| < r$ ■

**Remarque** : Si on observe l'invariance par translation de la convexité, il suffit de prendre $x_0 = 0$.

En particulier, la boule unité fermée $B_f(0;1)$ est convexe.

$x \in B_f(0,1) \Rightarrow -x \in B_f(0,1)$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ si $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ $\quad x \in B_f(0,1) \Rightarrow \lambda x \in B_f(0,1)$ $\quad \|\lambda x\| = \|x\|$.

**Définition** : $A \subset E$ est dite "équilibrée" si $\forall x \in A$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| = 1$ alors $\lambda x \in A$.

sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow A$ est symétrique par rapport à $0$.

sur $\mathbb{C} \Leftrightarrow A$ invariante par rotation $\lambda = e^{i\theta}$.

**Propriétés** : $\lambda . Bf(0,1) = Bf(0,\lambda)$

$\bigcap_{\lambda \in \mathbb{R}^+} \lambda\, Bf(0,1) = \{0\}$ (séparation $\|x\| = 0 \Rightarrow \|x\| = 0$).

$\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}^+} \lambda\, Bf(0,1) = E$ $x \in E$ pour $\lambda = \|x\|$

**Théorème** : Il y a une correspondance bijective entre les normes possibles $N(x) = \|x\|$ sur le $\mathbb{K}$ ev $E$ et les parties $A$ ayant les propriétés suivantes :

(i) $A$ est convexe

(ii) $A$ est équilibrée.

(iii) $\forall x \in E$, $x \neq 0$, $\{\lambda \geq 0, \lambda x \in A\}$ intervalle $[0; a_x]$, $a_x > 0$

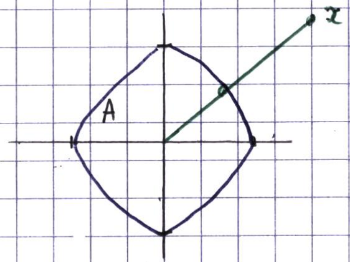
$\Downarrow$

(iv) $\bigcap_{\lambda \in \mathbb{R}^+} \lambda A = \{0\}$ et $A$ "absorbante" $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}^+} \lambda A = E$

**Exemple**:

$N \longmapsto A = Bf(0,1)$.

$N_A(x) = \inf \{\lambda > 0, \frac{1}{\lambda} x \in A\}$




**Exercice** :

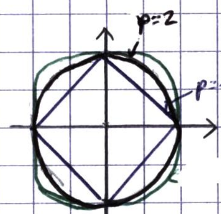
$A$ convexe $\Rightarrow N_A$ vérifie l'inégalité triangulaire.

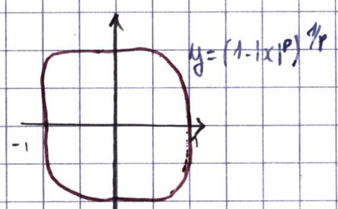
**Exemple** : norme $\ell^p$.

① $E = \mathbb{R}^2$ $x = (x_1, x_2)$

$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p\right)^{1/p}$

$Bf_{\ell^p}(0,1) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \; |x_1|^p + |x_2|^p \leq 1\}$




Condition nécessaire et suffisante : $f(x) = (1-|x|^p)^{1/p}$ doit être concave sur $[-1;1]$.

Par symétrie, il suffit de regarder sur $[0;1]$.

$f(x) = (1-x^p)^{1/p}$ dérivable $C^\infty$ sur $]0;1[$.

$f'(x) = -x^{p-1}(1-x^p)^{\frac{1}{p}-1}$

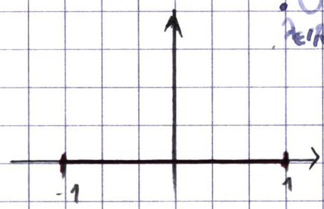
$f''(x) = -(p-1)\left[x^{p-2}(1-x^p)^{\frac{1}{p}-1} + x^{2p-2}(1-x^p)^{\frac{1}{p}-2}\right]$

$\begin{cases} f''(x) \leq 0 & \text{si } p \in [1;+\infty[ \\ f''(x) > 0 & \text{si } p \in ]0;1[ \text{ et } x \in ]0;1[ \end{cases}$

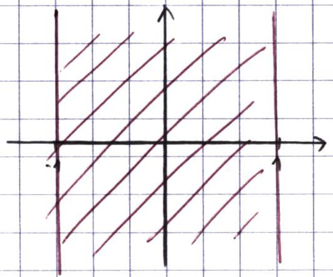
* Si $p \in [1;+\infty[$, $A = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 ; |x_1|^p + |x_2|^p \leq 1\}$ est bien convexe.

$\left(x \longmapsto (1-|x|^p)^{1/p} \text{ concave sur } [-1;1]\right)$.

- $A$ fermée (inégalité triangulaire).
- $A$ équilibrée $(x_1, x_2) \rightsquigarrow (-x_1, -x_2)$
- $\bigcap_{\lambda \in \mathbb{R}^+} \lambda A = \{0\}$
- $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}^+} \lambda A = \mathbb{R}^2$




$A = [-1,1] \times \{0\}$ $\qquad \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}^+} \lambda A = \mathbb{R} \times \{0\} \neq \mathbb{R}^2$



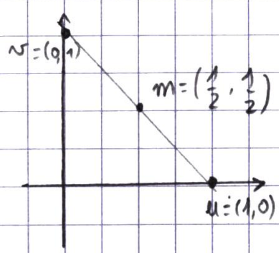
$\bigcap_{\lambda \in \mathbb{R}^+} \lambda A = \{0\} \times \mathbb{R} \neq \{0\}$.

* si $p \in ]0;1[$

$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}$

On a bien $\|x\|_p = 0 \iff x = 0$

$\|\lambda x\|_p = |\lambda| \, \|x\|_p$.




Mais l'inégalité triangulaire est fausse.

$\|u\|_p = \|v\|_p = 1$

$\|m\|_p = (2^{-p} + 2^{-p})^{1/p} = (2^{1-p})^{\frac{1}{p}} = 2^{1/p - 1} > 1$ si $p < 1$.

② Cas de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$

- $\mathbb{C}^2$ $\quad z = (z_1, z_2)$ $\quad \|z\|_p = \left(|z_1|^p + |z_2|^p\right)^{1/p}$.

  Satisfait l'inégalité triangulaire, c'est bien une norme si $p \geq 1$.

- $\mathbb{R}^n$ $\quad x = (x_1, \dots, x_n)$ $\quad \|x\|_p = \left(|x_1|^p + \dots + |x_n|^p\right)^{1/p}$.

$n = 1$ $\quad \|x\|_p = |x_1|$.

**Proposition:** Pour $p \geq 1$, $x \longmapsto \|x\|_p$ est bien une norme sur $\mathbb{R}^n$.

## Démonstration :

par récurrence sur $n$, $n \geq 3$.

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n'} \times \mathbb{R}^{n''}$ avec $n' + n'' = n$.

$x = (x', x'')$ $\quad x' = (x_1, \dots, x_{n'})$ $\quad x'' = (x_{n'+1}, \dots, x_{n'+n''})$.

$N'(x') = \|x'\|_p$ dans $\mathbb{R}^{n'}$.

$N''(x'') = \|x''\|_p$ dans $\mathbb{R}^{n''}$ $\Big\}$ $N'(x') = \|x'\|_p = \left( \sum_{i=1}^{n'} |x_i|^p \right)^{1/p}$

$N(x) = \left( N'(x')^p + N''(x'')^p \right)^{1/p}$

$N(x+y)$ $\quad \left. \begin{array}{l} x = (x', x'') \\ y = (y', y'') \end{array} \right\} x + y = (x' + y', x'' + y'')$.

résultat $\underbrace{N' \text{ dans } \mathbb{R}^{n'}, N'' \text{ dans } \mathbb{R}^{n''}}_{\text{normes}}$ et dans $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ résultat pour $N$ dans $\mathbb{R}^n$. ∎

### 4) Normes équivalentes.

**Définition :** Soit $E$ un ev sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On considère 2 normes $N_1, N_2$.

$\|x\|_1 = N_1(x)$, $\|x\|_2 = N_2(x)$.

On écrit $N_1 \sim N_2$ ou $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$. si $\exists c, c' > 0$ constantes

telles que $\forall x \in E$ $\quad c' N_1(x) \leq N_2(x) \leq c N_1(x)$. $(*)$

C'est bien une relation d'équivalence, et on dit que les <u>normes sont équivalentes</u>.

(i) Réflexive : si $N_1 = N_2$ on prend $c = c' = 1$.

(ii) $N_1 \sim N_2 \Rightarrow N_2 \sim N_1$. $\quad (*) \Rightarrow c^{-1} N_2(x) \leq N_1(x) \leq (c')^{-1} N_2(x)$. $\quad$ (symétrique)

(iii). $N_1 \sim N_2$ et $N_2 \sim N_3 \Rightarrow N_1 \sim N_3$ (exo). (transitivité).

<u>Propriétés sur les boules associées :</u>

Comparons $\left\{ \begin{array}{l} B_{N_1}(x, r) \\ B_{N_2}(x, r) \end{array} \right.$

$N_1(x) < r \Rightarrow N_1(x) < cr$ $\qquad B_{N_1}(x, r) \subset B_{N_2}(x, cr)$

$N_2(x) < r \Rightarrow N_2(x) \leq (c')^{-1} r$ $\qquad B_{N_2}(x, r) \subset B_{N_1}(x, (c')^{-1} r)$.

<u>Conséquence :</u> Le remplacement d'une norme par une norme équivalente ne change pas les notions de limites ou de continuité.