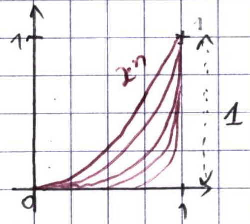
dernière fois
6/10/14

Exemple : $A = [0;1[$.



$f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

- convergence simple.

$\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \quad \forall x \in [0;1[$

$(f_n) \to g = 0$ CV simplement

$\|g - f_n\|_\infty = \|f_n\|_\infty = 1$.

$(f_n) \to g$ avec convergence simple mais pas uniforme.

Théorème : $\ell^\infty(A, \mathbb{K})$ est un espace complet.
Toute suite de Cauchy (f_n) dans $\ell^\infty(A,\mathbb{K})$ est convergente.

Démonstration :

- $\mathbb{R}$ est complet.
- $\mathbb{C}$ est complet.
- $z_n = x_n + y_n$ suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \; \forall p,q \in \mathbb{N} \quad p,q \geq N \Rightarrow |z_p - z_q| \leq \varepsilon$.

$|z_p - z_q| = |(x_p - x_q) + i(y_p - y_q)|$

$$\left.\begin{array}{l} |x_p - x_q| \leq |z_p - z_q| \leq \varepsilon \\ |y_p - y_q| \leq |z_p - z_q| \leq \varepsilon \end{array}\right\} \text{pour } p,q \geq N.$$

On a donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suites de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow x_n \xrightarrow[CV]{} a \in \mathbb{R} \qquad y_n \xrightarrow[CV]{} b \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow z_n = x_n + iy_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a + ib \in \mathbb{C}$.

- $f_n : A \longrightarrow \mathbb{K}$.
  $x \longmapsto f_n(x) \in \mathbb{K}$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall p,q \in \mathbb{N}, p,q \geq N \Rightarrow \|f_p - f_q\|_\infty \leq \varepsilon$. $(*)$

$\|f\|_\infty = \sup_{x\in A} |f(x)|$

$(*)$ donne $\forall x \in A \quad |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$.

Pour x fixé, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$,

donc comme $\mathbb{K}$ est complet, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{K}$ existe.

prenons $p = n \geq N$ et faisons tendre $q \to +\infty$.

A la limite, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in A$.

$\Rightarrow |f_n(x)| \leq |f_n(x)| + \varepsilon \leq \|f_n\|_\infty + \varepsilon$

$\Rightarrow f$ est bornée càd $f \in \ell^\infty(A, \mathbb{K})$.

De plus, on a $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$ si $n \geq N$.

On a bien $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f$ dans $\ell^\infty(A, \mathbb{K})$.

<u>Critère de Cauchy "simple"</u> :

$\forall x \in A$ $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ suite de Cauchy.

$\forall x \in A$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ $p, q \geq N_{x,\varepsilon} \Rightarrow |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$.

<u>Critère de Cauchy "uniforme"</u> : (*).

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ $\forall p, q \geq N_\varepsilon$, $\forall x \in A$, $p, q \geq N_\varepsilon \Rightarrow |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$.

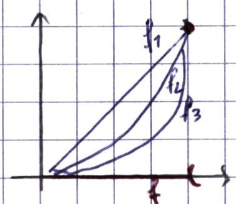
Supposons (A, d) espace métrique :

- Donnons-nous une suite $f_n : A \to \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continue en un point $x_0 \in A$.
- Supposons $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ existe $\forall x \in A$.

<u>Question</u> : A-t-on f est continue en x_0 ?

<u>Exemple</u> : $A = [0; 1] \xrightarrow{f_n} \mathbb{R}$

$x \longmapsto f_n(x) = x^n$.



f_n continue sur $[0; 1]$.

$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0; 1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

f n'est pas continue au point 1.

<u>Théorème</u> : Si f_n CVU vers f càd si $\lim\limits_{n \to \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ et si les f_n sont continues en un point $x_0 \in A$, alors f est continue en x_0.

<u>Démonstration</u> :

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N_\varepsilon$ on a $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$

$\forall n \geq N_\varepsilon$ $\forall x \in A$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Hypothèse : f_n continue en x_0.

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_{n,\varepsilon} > 0$ $\forall x \in A$ $d(x, x_0) \leq \delta_{n,\varepsilon} \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \varepsilon$.

Prenons $n = N_\varepsilon$, $\forall x \in A$ $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

en particulier, $|f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \varepsilon$

$|f(x)-f(x_0)| = |(f(x)-f_n(x)) + (f_n(x)-f_n(x_0)) + (f_n(x_0)-f(x_0))| \leq 3\varepsilon$ pour $d(x,x_0) \leq \delta_{n,\varepsilon} = \delta_{N_\varepsilon,\varepsilon}$.

donc f est bien continue en x_0 ■

Corollaire : Soit $\mathcal{C}_b(A,\mathbb{K}) \subset \ell^\infty(A,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues bornées $A \longrightarrow \mathbb{K}$ muni de $\|\cdot\|_\infty$.

Alors $\mathcal{C}_b(A,\mathbb{K})$ est un espace complet.

Démonstration :

(f_n) suite de Cauchy dans $\mathcal{C}_b(A,\mathbb{K})$.

Alors (f_n) CV vers $f \in \ell^\infty(A,\mathbb{K})$ complet.

$$\left.\begin{array}{l} (f_n) \text{ continue sur } A \\ f_n \longrightarrow f \text{ CVU} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ continue.}$$

On a bien $f \in \mathcal{C}_b(A,\mathbb{K})$. ■

Exercice : Soit (E,N) un espace normé <u>complet</u>.

Alors les espaces
- $\ell^\infty(A,E)$ des fonctions $f : A \to E$ avec $\|f\|_{N,E} = \sup_{x\in A} \|f(x)\|_N$.
- $\mathcal{C}_b(A,E)$ des fonctions continues bornées $A \to E$

sont complets.

2. Complétude et convergence des séries dans un espace normé.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé.

Définition : Une série $\sum_{n\geq n_0} u_n \in E$ est dite <u>normalement convergente</u>, ou convergente en norme si $\underbrace{\sum_{n=n_0}^{\infty} \|u_n\|}_{\in \mathbb{R}^+} < +\infty$.

($\Leftrightarrow \sigma_n = \|u_{n_0}\| + \dots + \|u_n\|$ sommes partielles forment une suite bornée).

Propriété : $\sum_{n\geq n_0} \|u_n\| < +\infty \Rightarrow (S_n)_{n\geq n_0}$ de Cauchy dans E. où $S_n = u_{n_0} + \dots + u_n$.

Démonstration :

La suite σ_n est convergente, donc de Cauchy.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall p,q \geq N_\varepsilon\ p \geq q \geq N_\varepsilon \Rightarrow \underbrace{\sigma_p - \sigma_q}_{\geq 0} \leq \varepsilon$.

$\sigma_p - \sigma_q = \|u_{q+1}\| + \dots + \|u_p\|$

$S_p - S_q = u_{q+1} + \dots + u_p \in E$.

$\|S_p - S_q\| \leq \|u_{q+1}\| + \dots + \|u_p\| = \sigma_p - \sigma_q . \leq \varepsilon$ pour $p, q \geq N_\varepsilon$.

Si E est complet, $(S_n)_{n \geq n_0}$ converge dans E, càd que $\sum_{n \geq n_0} u_n$ CV dans E. ■

$\boxed{\textbf{Théorème :} \text{ Si } E \text{ est complet, } \sum \|u_n\| \text{ CV dans } \mathbb{R}^+ \Rightarrow \sum u_n \text{ CV dans } E.}$

Attention : complètement faux si E non supposé complet.

$E = \mathbb{R}[X]$ polynômes sur $\mathbb{R}$.

$p \in E \quad \|p\| = \sup_{x \in [0; \frac{1}{2}]} |p(x)|$.

Vérification : axiome de séparation . $\|p\| = 0 \Rightarrow p = 0$?

$\Updownarrow$

$\forall x \in [0; \frac{1}{2}], p(x) = 0$ } infinité de racines $\Rightarrow p = 0$.

$p_n(x) = x^n$

$\|p_n\| = \frac{1}{2^n}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \|p_n\| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$.

$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) = \frac{1}{1-x}$ pas un polynôme !!

$\mathbb{R}[X]$ n'est donc pas complet avec cette norme.

La série ne converge pas dans l'espace E.

3. Cas des séries de fonctions.

$f_n : A \longrightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $\quad \sum f_n(x)$.

Théorème :

Supposons les f_n bornées : $(f_n) \in \ell^\infty(A, \mathbb{K})$.

$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in A} |f_n(x)|$

(1) $\left.\begin{array}{l} \ell^\infty(A, \mathbb{K}) \text{ complet} \\ \sum \|f_n\|_\infty < \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \sum f_n$ CV dans $\ell^\infty(A, \mathbb{K})$.

(2) CV normale $\Rightarrow$ CV uniforme.

Convergence "normale":

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \ \forall p \geq q \geq N_\varepsilon \quad \sigma_p - \sigma_q = \|f_{q+1}\|_\infty + \ldots + \|f_p\|_\infty \leq \varepsilon.$

Convergence uniforme:

$S_n = f_{n_0} + \ldots + f_n$ suite de Cauchy dans $\ell^\infty(A, \mathbb{K})$.

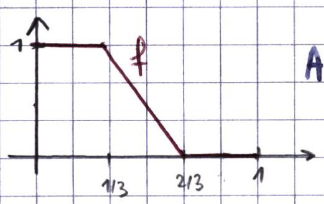
$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon' \ \forall p \geq q \geq N_\varepsilon, \ \|f_{q+1} + \ldots + f_p\|_\infty < +\infty$

$\forall x \in A \quad |f_{q+1}(x) + \ldots + f_p(x)| \leq \varepsilon.$

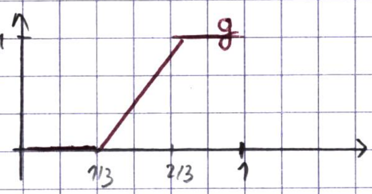
CVU: $\|f_{q+1} + \ldots + f_p\|_\infty = \sup_{x \in A} |f_{q+1}(x) + \ldots + f_p(x)| \leq \varepsilon.$

CVN: $\|f_{q+1}\|_\infty + \ldots + \|f_p\|_\infty = \sup_{x \in A} |f_{q+1}(x)| + \ldots + \sup_{x \in A} |f_p(x)| \leq \varepsilon.$

Exemple:



$A = [0, 1]$



$\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1 \Rightarrow \|f\|_\infty + \|g\|_\infty = 2.$

$\|f + g\|_\infty = 1 < \|f\|_\infty + \|g\|_\infty = 2.$

Théorème: Si (A, d) espace métrique et si $f_n : A \to \mathbb{K}$ fonctions continues.

si $\sum_{n \geq n_0} f_n$ CVU alors $S(x) = \sum_{n \geq n_0} f_n(x)$ est une fonction continue.

$$\left. \begin{array}{l} S_n(x) = f_{n_0}(x) + \ldots + f_n(x) \text{ continues} \\ \|S_n - S\|_\infty \longrightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow S \text{ continue.}$$

A fortiori, si $\sum \|f_n\|_\infty$ CV alors $\sum f_n$ continue.

Exercice: Série de Riemann alternée.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = 1 - \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} - \frac{1}{4^x} + \ldots$$

- $x > 1$ $\sum \frac{1}{n^x}$ cv absolument.
- $x \in]0; 1]$ $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ série alternée convergente.

$A =]a;+\infty[\quad f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$

$$\|f_n\|_{\ell^\infty(A,\mathbb{R})} = \frac{1}{n^a}$$

$\sum \|f_n\|_{\ell^\infty(A,\mathbb{R})} < \infty \Leftrightarrow \sum \frac{1}{n^a}$ cv $\Leftrightarrow a > 1.$

- CVN sur $]a;+\infty[$ ssi $a > 1$.
- Montrer qu'il y a CVU sur tout intervalle $]a;+\infty[$ $a > 0$.

$S(x) - S_n(x) = R_n(x) \qquad |R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)^x}.$